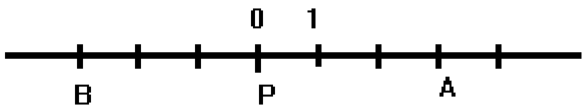
Analytická geometrie lineárních útvarů

1) Na přímce:

a) Souřadnice bodu na přímce:



Bod P nazýváme počátek - jeho souřadnice je P =[0]
Nalevo od počátku leží čísla záporná, napravo čísla kladná. Každý bod má pouze jednu souřadnici.
Souřadnice bodů: A = [3] ; B = [-3]

b) Vzdálenost dvou bodů na přímce:
Je-li A = [x_A] ; B = [x_B] , pak jejich vzdálenost $|AB| = |x_A - x_B|$

Příklad:
Na přímce jsou dány body A = [-4] ; B = [3]. Určete jejich vzdálenost.
Řešení:
$|AB| = |-4 -3| = 7$
Doplňte příklad obrázkem.

c) Střed úsečky na přímce:
Je-li A = [x_A] ; B = [x_B] , pak jejich střed má souřadnici S = [x_S] a platí:

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2}$$

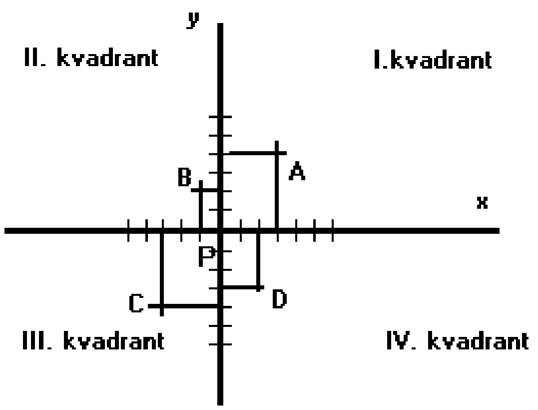
Příklad:
Určete střed úsečky AB s krajními body A = [-2] ; B = [8] .
Řešení:

Střed S = [x_S] $x_S = \frac{-2+8}{2} = 3$ S = [3]
Doplňte příklad obrázkem.

2)V rovině:

V rovině je dán souřadný systém s dvěma kolmými osami x , y . Jejich průsečík nazveme počátek.

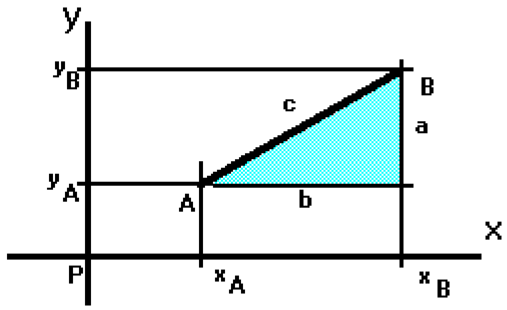
Souřadnice bodu v rovině:



Každý bod má v rovině dvě souřadnice - 1. x - ovou ; 2. y - ovou
A = [3,4] , B = [-1,2] , C = [-3,-4] , D = [2,-3]

Vzdálenost dvou bodů v rovině:

Je dán bod A = [x_A,y_A] a bod B = [x_B,y_B]. Jejich vzdálenost určíme z obrázku:



Platí Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$
$a = |y_A - y_B|$
$b = |x_A - x_B|$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Příklad:
V rovině jsou dány body X = [5,-2] , Y = [-1, 4]. Určete jejich vzdálenost.

Řešení:

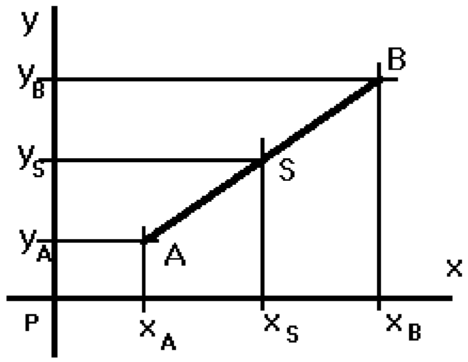
$$|XY| = \sqrt{(-1-5)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Doplňte příklad obrázkem.

Cvičení:
1. Je dán trojúhelník ABC : A = [1,-2] ; B = [-3 , 1] ; C = [4 , 2] . Dokažte, že je rovnoramenný a pravoúhlý.
2. Vypočtěte velikost obvodu trojúhelníku ABC : A = [-2,5;-6] ; B = [5; 0,5] ; C = [9 ; -8,2].
   [31,20]

Střed úsečky v rovině:

Je dána úsečka s krajními body A = [x_A,y_A] a B = [x_B,y_B]. Jejím středem je bod S = [x_S ,y_S] a platí:



$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_s = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Příklad:
Vypočtěte souřadnice středu úsečky CD , je-li C = [5,4] , D = [-3,-2].
Řešení:

$$x_S = \frac{5-3}{2} = 1 \quad y_S = \frac{4-2}{2} = 1$$

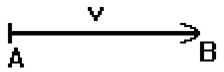
S = [1,1] .
Doplňte příklad obrázkem.

Cvičení:

1. Určete velikosti středních příček trojúhelníku ABC ,kde A = [-4,2] ; B = [4,-4] ; C = [2,5] .
[5 ; 4,6098 ; 3,354]
2. K bodu A = [2,5] určete bod B souměrně sdružený podle osy x.
[B = [2,-5]]
3. Najděte střed kružnice opsané trojúhelníku ABC : A = [2,-1] , B = [5,-2] ; C = [10,3].
[S = [5,3]]

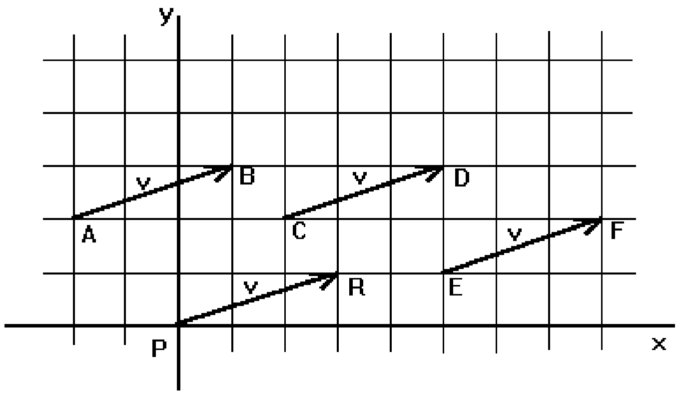
Vektory v rovině:

Vektor = orientovaná úsečka (ve fyzice např. síla , rychlost)



vektor AB - A - počáteční bod ; B - koncový bod

Souřadnice vektoru:



Na obrázku jsou zobrazeny čtyři vektory. Jsou rovnoběžné, stejně velké a stejně orientované - říkáme, že se jedná o různá umístění téhož vektoru.

Jedná se tedy o jeden vektor **v** umístěný v různých bodech.

Souřadnice vektoru určíme tak, že jeho počáteční bod umístíme do počátku souřadného systému a souřadnice vektoru budou souřadnicemi koncového bodu.

v = (3,1)

Je -li vektor **v** umístěn do bodů A = [x_A,y_A] a B = [x_B,y_B] kde A je bod počáteční a B bod koncový , pak jeho souřadnice určíme takto:

$$v = (v_1,v_2) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Příklad:

Určete souřadnice vektoru v = AB , kde A = [2,6] a B = [8,2].

Řešení:

v = (8 - 2 , 2 - 6) = (6 , -4)

Doplňte příklad obrázkem.

Příklad : Rozhodněte , zda orientované úsečky **AB , CD** jsou umístěním téhož vektoru :

a) A = [-5; 3] , B = [2 ; -1] , C= [-3; 1] ,D = [4; -3]
Návod : Vypočteme souřadnice jednotlivých vektorů a zjistíme, zda jsou shodné .
AB = (7 , - 4) , **CD** = (7, -4) ano
b) [-1;-6] , B= [-3 : -1] , C = [-3;-1] , D = [-1;-6]

***AB** = (-2, 5)   , **CD** = (2 , - 5)   ne*

Příklad : Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky AB, CD představovaly týž vektor : A – [-7;1] , B = [1; 7] ; C = [-2;-3] , D = [?; ?]

Návod : Napíšeme symbolické rovnice pro rovnost vektorů a dosadíme.

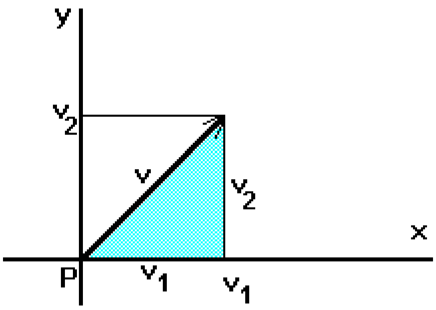
AB = CD

B – A = D – C

$1 - (-7) = d_1 - (-2)$	$7 - 1 = d_2 - (-3)$	
$8 = d_1 + 2$	$6 = d_2 + 3$	
$d_1 = 6$	$d_2 = 3$	D = [6 ; 3]

Velikost vektoru:

Je -li dán vektor $v = (v_1 , v_2)$, pak jeho velikost určíme následujícím způsobem:



$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Příklad:

Určete velikost vektoru v = (4,3).

Řešení:

$v = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Doplňte příklad obrázkem.

Příklad : Zakreslete vektory **AB , CD , EF** , určete jejich souřadnice a velikost :

A = [1; 2] , B = [5 ; 4] , C = [2 ; - 3] , D = [1 ; 2] , E = [5 ; 0] , F = [- 2 ; - 3]

$v_1 = x_B - x_A = 5 - 1 = 4$	$v_1 = -1 -2 = -3$	$v_1 = -2 - 5 = -7$
$v_2 = y_B - y_C = 4 - 2 = 2$	$v_2 = 2 - (-3) = 5$	$v_2 = -3 - 0 = -3$
v=(4 , 2)	**v = (- 3, -5)**	**v = (- 7 , - 3)**
$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$	$\|v\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$	$\|v\| = \sqrt{49+9} = \sqrt{54}$

Operace s vektory:

a) Součet vektorů:

Je dán vektor $v = (v_1,v_2)$ a vektor $u = (u_1,u_2)$. Jejich součtem u + v je vektor $w = (v_1+ u_1, v_2+ u_2)$.

b) Součin čísla a vektoru:

Je dán vektor $v = (v_1,v_2)$ a reálné číslo k . Jejich součinem k.v je vektor $w =(k.v_1, k.v_2)$.

c) Skalární součin vektorů:

Je dán vektor $v = (v_1,v_2)$ a vektor $u = (u_1,u_2)$. Jejich skalárním součinem $u \circ v$ je číslo :

$$u \circ v = u_1 . v_1 + u_2 . v_2$$

Skalární součin vektorů nelze zobrazit.

Příklad:
Jsou dány vektory v = (2,-3) , u = (5,6). Určete u + v , 4.v , u o v.

Řešení:
w = u + v = (2+5, -3+6) = (7, 3)
4.v = (4.2, 4. (-3)) = (8 , -12)
u o v = 2.5 + (-3).6 = 10 - 18 = -8

Úhel dvou vektorů:

Úhel dvou vektorů určíme z tohoto vzorce

$$\cos\alpha = \frac{|u \circ v|}{|u|.|v|}$$

tedy po dosazení

$$\cos\alpha = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Příklad:
Určete úhel vektoru u = (-4,2) a vektoru v = (2, 3).
Řešení:

Dosadíme do vzorce : $\cos\alpha = \frac{-4.2 + 2.3}{\sqrt{16+4}.\sqrt{4+9}} = \frac{-8+6}{\sqrt{20.13}} = \frac{-2}{\sqrt{260}} = -0{,}124034$

$\alpha = 97°07'$

Doplňte příklad obrázkem.

Je - li u o v = 0 pak vektory u a v jsou navzájem kolmé !

Příklad: Určete velikosti úhlů. které svírají úhlopříčky čtyřúhelníku ABCD :
A = [-3; 2] , B = [2 ; -4] , C = [7 ; -1] , D = [5 ; 4]

Vypočteme např. úhel vektorů **AC , BD** (určíme souřadnice těchto vektorů, jejich velikosti a dosadíme do vzorce) :

AC = C – A = (10, -3) $|AC| = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$ _

BD = D – B = (3 , 8) $|BD| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

$$\cos\varphi = \frac{30 - 24}{\sqrt{109}.\sqrt{73}} = 0{,}06726 \qquad \varphi = 86^0\,8'$$

$$\varepsilon = 180^0 - 86^0\,8' = 93^0\,52'$$

Příklad: Zjistěte, zda vektory **AB, CD** jsou navzájem kolmé (A = [4; 0] , B =[-6;4], C= { 1;7] , D = [-3;-3]
Určíme souřadnice vektorů AB = B-A = (-10, 4) , CD = D – C = (-4 , - 10) a dosadíme do podmínky pro kolmost vektorů : -10. (-4) + 4 .(-10) = 40- 40= 0 jsou kolmé

Příklad : Rozhodněte , zda trojúhelník ABC je pravoúhlý (pravý úhel u vrcholu C)
A=[-1;6],B=[2;-1],C=[-3;1]
Návod: zjistíme, zda vektory **CA , CB** jsou navzájem kolmé
CA = A – C = (-2 , -5) , CB = B-C = (5 , -2) (-2).5 + (-5) . (-2) = -10 + 10= 0
ano

- Lineární závislost a nezávislost vektorů:

a) Dva vektory

Vektory **u** a **v** jsou lineárně závislé , právě když existuje reálné číslo **k** tak že platí **u = k.v**

Příklad závislých vektorů: u = (-1 , 2) v = (2 , -4) - platí u = (-0,5).v číslo k = -2

b) Tři vektory

Vektory **u, v, w** jsou lineárně závislé právě když existují reálná čísla **m , n** tak, že platí **w = m.u + n.v**

Příklad závislých vektorů: u = (-1 , 2) v = (3 , -4) w = (7, -8)

platí: 7 = -1.m + 3.n /.2

$\underline{-8 = 2.m + (-4)n}$

14 = -2.m + 6.n

$\underline{-8 = 2.m - 4.n}$ rovnice sečteme

6 = 2.n

n =3 m = 3.n - 7 = 9-7 = 2

Vektory jsou lineárně závislé a platí: w = 2.u + 3.v

Vektor **w** nazýváme lineární kombinací vektorů **u** a **v**.

Studovat závislost a nezávislost 3 vektorů můžeme pouze v prostoru. V rovině platí, že 3 vektory jsou vždy závislé.

Cvičení:

1. Rozhodněte, zda orientované úsečky AB,CD , jsou umístěním téhož vektoru, jestliže
   a) A=[1; 2] , B = [-3; -1] , C = [11 ; -1] , D =[7 ; -4] (ano)
   b) A = [3; -2] , B = [-5; -4] , C = [-11; 5] , D = [-3; 7] (ne)

2. Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky AB , CD byly umístěním téhož vektoru :
   a) A = [-1;2] , B = [3; -5] , C = [5; -7] D = [9; - 14]
   b) A= [-5;-7] , B = [-3;-4] , C = [1;2] D = [3 ; 5]

3. Určete velikosti úhlů, které svírají úhlopříčky čtyřúhelníku ABCD :
   a) A= [-3;1] , B = [3 ; 9] , C = [7 ; 6] , D = [-2; 6] $175^0 36'$, $4^0 24'$
   b) A = [1; 2] , B = [-3 ; -1] , C = [7 ; 4] , D = [11; -1] $18^0 27'$, $171^0 33'$

4. Dokažte , že trojúhelník ABC je pravoúhlý : (zjistěte, zda vektory CA,CB jsou navzájem kolmé :
   a) A = [4; -1] , B = [3; 4] , C = [1 ; 2] ano
   b) A = [-1 ; 6] , B = [10; 7] , C = [5; 1] ano

5. Určete souřadnice vektoru v = AB , kde A = [2,-3] ; B = [6,7].
   [v = (4,10)]

6. V soustavě souřadnic jsou dány body A = [2,7] ; B = [-4,1]; C = $\left[\frac{13}{2};1\right]$. D = $\left[\frac{1}{2};-5\right]$. Jsou vektory $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}$ umístěním téhož vektoru?
   [ano]

7. V soustavě souřadnic jsou dány body A = [-2,0]; B = [2,4]; C = $\left[-3;-\frac{2}{3}\right]$; D = $\left[1;\frac{5}{3}\right]$; E = [2,-2] ; F = [6,2]. Zjistěte, zda jsou si rovny vektory a) $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EF}$; c) $\overrightarrow{CD};\overrightarrow{EF}$
   [a) ne; b) ano; c) ne]

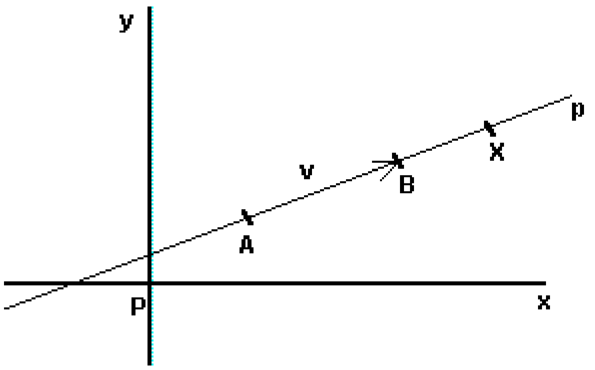
8. Jsou dány body A = [4,0] ; B = [5,-2]; D = $\left[\frac{4}{5};-\frac{15}{2}\right]$. Určete bod C tak, aby vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BD}$ byly umístěním téhož vektoru u.
   [C = [-0,2;-5,5]]

9. Určete skalární součin vektorů u = (-2 , 6) ; v = (3,-5).
   [-36]

10. Určete úhel vektorů u = (-6,8) v = (2, -4).
[169°41´]
11. Je dán vektor v = (-2,3) a vektor u = AB , A = [7,1] , B = [-1,3] . Určete jejich úhel.
[42°17´]
12. Rozhodněte, zda jsou kolmé vektory u = (-5,3); v = (-6 , -10)
[ano]
13. Určete koeficienty lineární závislosti vektorů u = (-2,6) ; v = (3, -6) a w = (8, -18).
[-1 ; 2]
14. Rozhodněte, zda jsou kolmé vektory a = (6,-6) ; b = (18, 18).
[ano]
15. Najděte alespoň jeden vektor v tak, aby s vektorem u = (2,-1) byly kolmé.
16. Trojúhelník ABC má vrcholy A = [-5,2] ; B = [1,5]. Určete souřadnici vrcholu C , jestliže vektor u = AC = (3,-4). Dále určete velikosti vektorů u = AC ; v = AB ; w = BC .
[C = [-2,-2] , $|u| = 5; |v| = 3.\sqrt{5}; |w| = \sqrt{58}$]
17. Rovnoběžník ABCD má vrcholy A = [0,0] ; B = [8,-2] ; C = [12,4] . Určete souřadnice vrcholu D.
[D = [4,6]]
18. Vektor v = AB , A = [-2,1]; B = [1,5] , vektor u = AC , C = [7,-3] . Určete úhel α vektorů u a v.
[α = 77°03´]
19. Je dán trojúhelník ABC : A = [7,-3] ; B = [-2,1]; C = [1,5] . Určete úhel β.
[β = 77°03´]
20. Je dán rovnoběžník ABCD , A = [3,3] ; B = [2,7]; C = [7,5]. Určete souřadnice vrcholu D a úhel jeho úhlopříček.
[D = [8,1] , γ = 71°34´]
21. Jsou dány body : A = [0,3] ; B = [-3,-3]; C = [4,11]. Leží tyto body v jedné přímce?
[ano]

Parametrické vyjádření přímky v rovině

Přímka je jednoznačně určena dvěma různými body . K nalezení parametrické rovnice přímky potřebujeme mít dán jeden bod a vektor (směrový vektor přímky).



Přímka je množina bodů X . Každý bod X= [x,y] na přímce p dostaneme tak , že k bodu A = [a_1,a_2] přičteme **t** násobek vektoru **v**.

Tedy $X = A + t.\,v$ po rozepsání do souřadnic dostaneme parametrickou rovnici přímky:

p : $x = a_1 + t.v_1$
$y = a_2 + t.v_2$ kde t je parametr

<u>Příklad:</u>
Napište parametrickou rovnici přímky , určené bodem A = [3,4] a vektorem v = (2,5).
<u>Řešení:</u>
p: $x = 3 + 2.t$
$y = 4 + 5.t$

<u>Příklad:</u>
Napište parametrickou rovnici přímky určené bodem A = [5,6] a bodem B = [7,7].

Řešení:
Z dvojice bodů A,B nejprve určíme vektor AB = u = (2,1).
p: $x = 5 + 2.t$
$y = 6 + t$

Příklad:
Je dána přímka p: $x = 5 + 2.t$; $y = 6 + t$. Určete zda na této přímce leží bod K = [1,4] a bod M = [3,6].
Řešení:
Leží-li bod na přímce, pak jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici přímky.
K : $1 = 5 + 2.t \Rightarrow t = -2$
$4 = 6 + t \Rightarrow t = -2$
Protože vyšlo v obou rovnicích stejné t , bod K leží na přímce p.
M: $3 = 5 + 2.t \Rightarrow t = -1$
$6 = 6 + t \Rightarrow t = 0$
Protože vyšlo v obou rovnicích různé t , bod M neleží na přímce p.

Cvičení:
1. Napište parametrickou rovnici přímky určené bodem P = [3 , -8] a směrovým vektorem v = (3 , 4).
[x = 3+3t , y = -8+4t]
2. Napište parametrickou rovnici přímky určené bodem A = [6 , 3]a bodem B = [3 ,- 2]
[x = 6-3t , y = 3-5t]
3. Jsou dány tři body A = [-4 , 2], B = [2 , 0], C = [1 , 6] . Tyto body tvoří trojúhelník .Napište parametrické rovnice těžnic trojúhelníku ABC.
$$\left[x = -4 + \frac{11}{2}t; y = 2 + t \quad x = 2 - \frac{7}{2}k; y = 4k \quad x = 1 - 2m; y = 6 - 5m \right]$$
4. Jsou dány body A = [-3 , 0], B = [1 , 4]. Určete vzájemnou polohu přímky určené body A a B s přímkou p: x = 2-4t , y = -1+4t.

Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky v rovině má tvar: $\mathbf{ax + by + c = 0}$

kde a , b, c jsou reálná čísla .
Vektor n = (a, b) je vektor kolmý k přímce, říkáme mu vektor normálový.

Obecnou rovnici přímky získáme z parametrické rovnice tak, že obě rovnice vynásobíme takovými čísly, aby po jejich sečtení vypadl parametr t .

Příklad:
Přímku p : $x = 5 + 2.t$; $y = 6 + t$ převeďte na obecný tvar.

Řešení:
p : $x = 5 + 2.t$
$y = 6 + t$ /.(-2)
$x = 5 + 2t$
$-2y = -12-2t$ rovnice sečteme
$x -2y = -7$
p: $x - 2y +7 = 0$

- Máme-li dány dva body a chceme sestavit obecnou rovnici přímky určené těmito body , můžeme postupovat dvěma způsoby:
  1) Sestavíme nejprve parametrickou rovnici přímky a postupem z předchozího příkladu přejdeme na rovnici obecnou
  2) Najdeme normálový vektor přímky a postupujeme podle následujícího příkladu:

Příklad:
Napište obecnou rovnici přímky určené bodem A = [-2,6] a bodem B = [4,-3].

Řešení:
Nejprve najdeme vektor v = AB = (6,-9). K němu kolmý vektor (normálový vektor přímky) n = (9 , 6).

Máme již první koeficienty obecné rovnice a = 9 , b = 6.

Rovnice přímky bude mít tento tvar: 9x + 6y + c = 0

Zbývá nalézt koeficient c. Ten najdeme tak, že dosadíme jeden z bodů A nebo B za x a y do rovnice:

$A \in p$: 9.(-2) + 6.6 + c = 0
- 18 + 36 + c = 0
c = -18

Celá rovnice bude mít tvar: 9x + 6y - 18 = 0 můžeme ji ještě dělit 3
p: 3x + 2y - 6 = 0

Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu A = [x_0 , y_0] od přímky p : ax + by + c = 0

Vypočteme podle vzorce $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Příklad:

Je dána přímka p : 2x - 3 y + 7 = 0 . Vypočtěte vzdálenost bodu K = [-1 , 2] od této přímky.

Řešení:

Vypočteme podle vzorce $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|2x - 3y + 7|}{\sqrt{4 + 9}} = \dfrac{|-2 - 6 + 7|}{\sqrt{13}} = 0{,}277$

Úhel dvou přímek :

Vypočteme buď jako úhel dvou směrových nebo dvou normálových vektorů takto:

$$\cos\alpha = \frac{|u \circ v|}{|u|.|v|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|u_1.v_1 + u_2.v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Příklad:

Určete úhel přímek: p: -2x + 3y + 7 = 0

q: 3x - 4y +5 = 0

Řešení:

n_p = (-2 , 3) ; n_q = (3 , -4)

$$\cos\alpha = \frac{|n_{p1}.n_{q1} + n_{p2}.n_{q2}|}{\sqrt{n_{p1}^2 + n_{q1}^2}.\sqrt{n_{p2}^2 + n_{q2}^2}} = \frac{|-6 - 12|}{\sqrt{4 + 9}\sqrt{9 + 16}} = \frac{18}{5\sqrt{13}} \qquad \alpha = 3^\circ 10'$$

Vzájemná poloha 2 přímek v rovině

Vzájemnou polohu určíme pomocí směrových vektorů obou přímek. Jsou -li přímky zadány obecnou rovnicí, je lepší místo směrových vektorů použít normálové.

a) rovnoběžné - totožné - směrové vektory lineárně závislé, všechny body společné

- různé - směrové vektory lineárně závislé, žádný společný bod

b) různoběžné - směrové vektory lineárně nezávislé, jeden společný bod - průsečík

Průsečík obou přímek najdeme, řešíme-li soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

<u>Příklad:</u>

Určete vzájemnou polohu přímek p: $x = -1 + 3.t$, $y = 2 - t$ q: $x = 2 - 3.k$, $y = -3 + k$

<u>Řešení:</u>

$u_p = (3, -1)$; $v_q = (-3, 1)$

Pro směrové vektory obou přímek platí : $u_p = - v_q$

Přímky mohou být buď totožné nebo rovnoběžné.

Na přímce zvolíme libovolný bod C : volíme např . $t = 2$ $x = 5$; $y = 0$ $C = [5, 0]$

Ověříme, zda tento bod leží i na přímce q : $x = 2 - 3.k$ $5 = 2 - 3.k$ $k = -1$

$y = -3 + k$ $0 = -3 + k$ $k = 3$

Protože hodnota k je různá, bod C na q neleží a přímky jsou rovnoběžné různé.

<u>Příklad:</u>

Určete vzájemnou polohu přímek p: $-2x + 3y + 7 = 0$

q: $3x - 4y + 5 = 0$

<u>Řešení:</u>

$n_p = (-2, 3)$; $n_q = (3, -4)$ - tyto vektory jsou lineárně nezávislé - přímky jsou **různoběžné**

Určíme jejich průsečík P: $-2x + 3y + 7 = 0 \quad / .3$

$\underline{3x - 4y + 5 = 0 \quad / .2}$

$-6x + 9y + 21 = 0$

$\underline{6x - 8y + 10 = 0}$ obě rovnice sečteme

$y + 31 = 0$ $\underline{y = -31}$

$$x = \frac{3y + 7}{2} = \frac{-93 + 7}{2} = -43$$ <u>**P = [- 43 , -31]**</u>

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek určíme tak , že na jedné z nich zvolíme libovolný bod a podle vzorce vypočteme jeho vzdálenost od druhé přímky.

<u>Příklad:</u>

Je dána přímka p : $-2x + 3y + 7 = 0$

q : $-4x + 6y + 7 = 0$

Určete jejich vzdálenost.

Řešení:

n $_p$ = (-2 , 3) ; n $_q$ = (-4 , 6) - tyto vektory jsou lineárně závislé , ale koeficient c v druhé rovnici není dvojnásobkem c v první rovnici - přímky jsou **rovnoběžné**

Na p zvolíme libovolný bod : x = -1 (volíme libovolně) y vyjde z rovnice - y = -3

A = [-1 , - 3]

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|-4x_0 + 6y_0 + 7|}{\sqrt{16 + 36}} = \frac{|4 - 18 + 7|}{\sqrt{52}} = 0{,}9707$$

Cvičení:

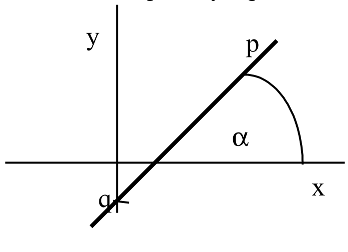
5. Napište obecnou rovnici přímky určené bodem A =[1,2] a B = [2, 1].
   [x + y - 3 = 0]
6. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A =[-3,2] a je rovnoběžná s osou x.
   [y = 2]
7. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A =[-3,2] a je rovnoběžná s osou y.
   [x = -3]
8. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A =[-3,2] a je rovnoběžná s přímkou 2x - 5y + 7 = 0.
   [2x - 5y + 16 = 0]
9. Určete vzájemnou polohu dvou přímek p: x = 3+3t , y = -8+4t
   q -3x + 2y -5 = 0
   Určete případný průsečík , úhel nebo vzdálenost.
   [různob.; P = [$\frac{141}{17};\frac{-16}{17}$]; α = 3°10´]
10. Vypočtěte odchylku přímek p: x – 3y + 6 = 0 ; q: x + 2y – 8 = 0
    [45°]
11. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A = [4,3] a má od přímky x – y + 7 = 0 odchylku 45°.
    [x - 4 = 0 nebo y - 3 = 0]
12. Najděte průsečík přímek p: 2x – y – 3 = 0, q: 3x + y –2 = 0.
    [P = [1, -1]]

Směrnicový tvar rovnice přímky

Je to rovnice v tomto tvaru:

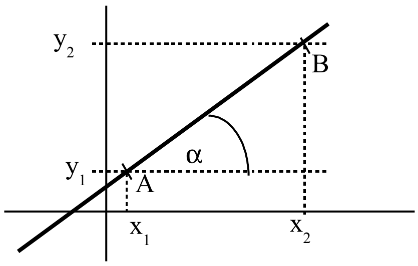
$$y = kx + q$$

Proměnnou *k* nazýváme směrnice přímky a platí*:* k = tg α, kde α je úhel přímky p s osou x



Proměnná q se označuje úsek přímky na ose y. Přímka ve tvaru $y = kx + q$ tedy vždy prochází bodem [0,q].

Pro přímku určenou dvěma body A = [x_1,y_1]; B = [x_2,y_2] platí vzorec:



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Příklad:
Napište směrnicovou rovnici přímky p, která je určena body A = [6,1]; B = [9,10].

Řešení:

Z daného vztahu určíme k: $k = \frac{10-1}{9-6} = \frac{9}{3} = 3$

Rovnice má tvar
y = 3 x + q

Neznámou q zjistíme dosazením libovolného bodu do rovnice: *1 = 3.6 + q*
q = -17

Rovnice má tvar *y = 3 x – 17*

Tento tvar rovnice přímky připomíná lineární funkci.

Cvičení:

1.) Určete směrnicový tvar rovnice přímky, dané bodem A = [4;2] a směrovým úhlem α = $\frac{2\pi}{3}$.

[$y = -\sqrt{3}x + \left(2 + 4\sqrt{3}\right)$]

2.) Určete směrnicový tvar rovnice přímky, dané bodem A = [-3;0] a bodem B = [$\frac{14}{3}$; -2]

[$y = -\frac{6}{23}x - \frac{18}{23}$]

3.) Jsou dány body A = [-5;4] a B = [m ; -3]. Určete číslo m tak, aby přímka daná body A,B měla směrnici $k = -\frac{3}{4}$. Napište její rovnici v směrnicovém tvaru.

[m = $\frac{13}{3}$; y = $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$]

4.) Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky, která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou danou body A = [-1;-4] a B = [4 ; 7]

[$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$]

5.) Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky, která prochází počátkem bodem A = [3;0] a její úsek na ose y je q = $-\frac{5}{2}$

[$y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}$]

6.) Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky, která prochází počátkem bodem A = [4;6] a je kolmá k přímce o rovnici 7x – 2y + 6 = 0.

[$y = -\frac{2}{7}x + \frac{50}{7}$]

7.) Určete směrnici a úsek q přímky dané rovnicí 9x – 4y + 12 = 0.

[k = 2,25; q = 3]

8.) Přímka p má rovnici $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$. Napište obecnou rovnici přímky.

[$10x - 15y - 12 = 0$]