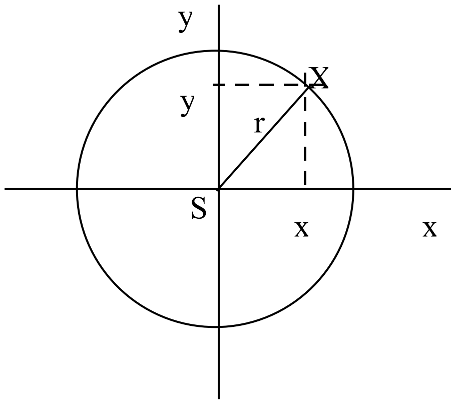
Analytická geometrie kvadratických křivek

Kružnice - množina všech bodů v rovině, které mají od středu **S** stejnou vzdálenost **r**.



1.) $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ - rovnice kružnice se středem v počátku

2.) $\mathbf{(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$ - rovnice kružnice s obecným středem S = [m, n]

Rovnice kružnice v středovém tvaru $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Po umocnění a úpravách dostaneme rovnici kružnice v obecném tvaru:

$\mathbf{x^2 + y^2 - ax + by - c = 0}$

<u>Příklad:</u>

Napište rovnici kružnice se středem v počátku souřadného systému a poloměrem r = 12.

<u>Řešení:</u>

$\mathbf{x^2 + y^2 = 144}$

<u>Příklad:</u>

Napište rovnici kružnice se středem S = [2, - 1] a poloměrem r = 5.

<u>Řešení:</u>

$\mathbf{(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 25}$

<u>Příklad:</u>

Napište rovnici kružnice se středem S = [-3, 4] a bodem na kružnici A = [3, 1]

<u>Řešení:</u>

$\mathbf{(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2}$

souřadnice bodu A dosadíme za x a y do rovnice a vypočteme r : $\mathbf{(3+ 3)^2 + (1 - 4)^2 = r^2}$

$\mathbf{36 + 9 = r^2}$ $\mathbf{r^2= 45}$

k : $\underline{\mathbf{(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 45}}$

<u>Příklad:</u>

Rovnici kružnice v obecném tvaru převeďte na tvar středový: $x^2 + y^2 + 8x – 10y – 75 = 0$, určete S a r .

<u>Řešení:</u>

členy rovnice přerovnáme tak, aby u sebe byly členy obsahující x a y: $x^2 + 8x + y^2 – 10y = 75$

$(x + 4)^2 + (y – 5)^2 = 75 +16 + 25$

$(x + 4)^2 + (y – 5)^2 = 116$

S = [-4 , 5]; r = $\sqrt{116}$

Příklad:

Rovnici kružnice v obecném tvaru převeďte na tvar středový: $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$, určete S a r .

Řešení:

členy rovnice přerovnáme tak, aby u sebe byly členy obsahující x a y: $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

$S = [-1, 3]$; $r = \sqrt{10}$

Cvičení:

1.) Je dán střed kružnice S = [3,2], r = 11. Napište středovou rovnici kružnice.

$[(x-3)^2 + (y-2)^2 = 121]$

2.) Je dán střed kružnice S = [4,1], r = 2 . Napište středovou rovnici kružnice.

$[(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4]$

3.) Je dán střed kružnice S = [-1;-1], r = 1. Napište středovou rovnici kružnice.

$[(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1]$

4.) Je dán střed kružnice S = [0,0], r = 7. Napište středovou rovnici kružnice.

$[x^2 + y^2 = 49]$

5.) Určete střed a poloměr kružnice: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$

[S = [4,1], r = 3]

6.) Určete střed a poloměr kružnice: $x^2 + y^2 - 16 = 0$

[S = [0,0], r = 4]

7.) Určete střed a poloměr kružnice: $x^2 + (y-3)^2 - 5 = 0$

[S = [0,3], r = $\sqrt{5}$]

8.) Napište rovnici kružnice v středovém i obecném tvaru, je-li dán střed S = [-1;3] a bod na kružnici K = [3;0].

[$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$]

9.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$; S = [3, -2]; r = 5]

10.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$; S = [1, -2]; r = 3]

11.) Rovnici kružnice $36x^2 + 36y^2 + 36x - 24y - 131 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 4$; $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$; r = 2]

12.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 6$; S = [1, 2]; r = $\sqrt{6}$]

13.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$; S = [4, 3]; r = 1]

14.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 16$; S = [-3, 3]; r = 4]

15.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 + 20y = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$x^2 + (y+10)^2 = 100$; S = [0, -10]; r = 10]

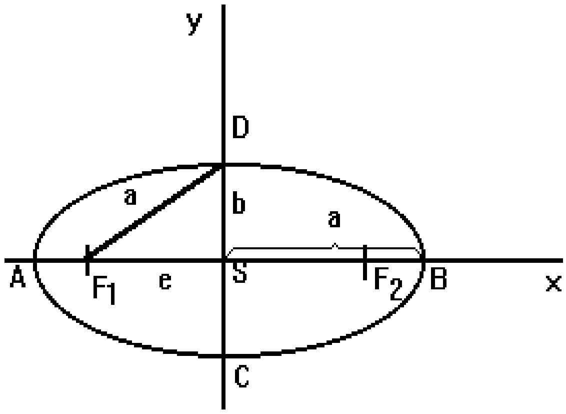
16.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 30 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[není kružnice]

17.) Rovnici kružnice $25x^2 + 25y^2 + 10x - 20y - 220 = 0$ převeďte na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

[$\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = 9$; $S = \left[-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right]$; $r = 3$]

Elipsa = množina všech bodů v rovině, které mají od 2 daných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností 2a



F_1, F_2 - ohniska

e - vzdálenost ohniska od středu (excentricita = výstřednost)

b - velikost vedlejší poloosy

a - velikost hlavní poloosy

A,B - hlavní vrcholy

C,D - vedlejší vrcholy

Platí: $a^2 = e^2 + b^2$

1.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - rovnice elipsy se středem v počátku

2.) $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ - rovnice elipsy s obecným středem $S = [m, n]$

V obecném tvaru: $kx^2 + ly^2 + ax + by + c = 0$ $\quad$ *kde* $l > 0$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem v počátku a velikostmi poloos a = 5, b = 4.

Řešení:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem S =[2, 6] a velikostmi poloos a = 5, b = 4.

Řešení:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem S =[-2, 5] a velikostí poloosy a = 10, a excentricitou e = 8.

Řešení:

Nejprve vypočteme b ze vztahu $a^2 = e^2 + b^2$

$b^2 = 100 – 64 = 36$ $\quad$ $b = 6$

$$\frac{(x+2)^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{36} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy , jsou-li dána ohniska $F_1 = [-2, 5]$, $F_2 = [6, 5]$, a velikostí poloosy a = 5.

Řešení:

Střed S leží ve středu úsečky $F_1 F_2$: S =[2 , 5]

e = | F_1S | = 4 $b^2 = 25 – 16 = 9$ b = 3

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy , jsou-li dány hlavní vrcholy A= [-2, 3] , B = [8, 3] , a velikostí excentricity e = 3.

Řešení:

Střed S leží ve středu úsečky AB: S =[3 , 3]

a = | AS | = 5 $b^2 = 25 – 9 = 16$ b = 4

Cvičení

18.) Napište rovnici elipsy, která má střed S = [3,2] ; ohnisko F_1 = [-1,2] a velikost b = 3.

$$[\ \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1\ ]$$

19.) Napište rovnici elipsy, která má střed S = [0,0] ; ohnisko F_1 = [-5,0] a velikost a = 7.

$$[\ \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1\ ]$$

20.) Napište rovnici elipsy, která má střed S = [0,0] ; ohnisko F_2 = [2,0] a velikost a = 7.

$$[\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1\ ]$$

21.) Je dána rovnice elipsy $x^2 + 3y^2 + 8x - 18y + 31 = 0$. Převeďte ji na středový tvar, určete souřadnice středu.

$$[\ \frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 ; S = [-4,3]\ ]$$

22.) Napište středovou rovnici elipsy se středem S = [-6,2] a jejím bodem K = [2,5], je-li a = 10, a hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$[\ \frac{(x+6)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1\ ]$$

23.) Napište středovou rovnici elipsy se středem S = [-3,-1] a jejím bodem K = [-8,-3], je-li b = 3, a hlavní osa je rovnoběžná s osou x.

$$[\ \frac{(x+3)^2}{45} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1\ ]$$

24.) Určete souřadnice středu, hlavních a vedlejších vrcholů , výstřednost a velikosti poloos elipsy

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{64} = 1$$

[S = [3,-1] ; A = [-7,-1]; B = [13,-1]; C = [3,-9]; D = [3,7]; a = 10; b= 8; e =6]

25.) Je dána rovnice elipsy $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. Převeďte ji na středový tvar, určete souřadnice středu, ohnisek, hlavních, a vedlejších vrcholů.

$$[\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 ; S = [0,0] ; A = [-3,0]; B = [3,0]; C = [0,2]; D = [0,-2]; e = \sqrt{5} ; F_1 = [-\sqrt{5},0]; F_1 = [\sqrt{5},0]]$$

26.) Je dána rovnice elipsy $4x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$. Převeďte ji na středový tvar, určete souřadnice středu, ohnisek, hlavních, a vedlejších vrcholů.

[$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$; S = [0,1] ; A = [0,-3]; B = [0,5]; C = [-2,1]; D = [2,1]; e =2 $\sqrt{3}$; F_1 = [0,1+2 $\sqrt{3}$]; F_1= [0,1-2 $\sqrt{3}$]]

27.) Je dána rovnice elipsy $x^2 + 2y^2 + 8x - 16 = 0$. Převeďte ji na středový tvar, určete souřadnice středu, ohnisek, hlavních, a vedlejších vrcholů.

[$\frac{(x+4)^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$; S = [-4,0] ; A = [-4 - 4 $\sqrt{2}$,0]; B = [-4 + 4 $\sqrt{2}$,0]; C = [-4,4]; D = [-4,-4]; e = 2; F_1 = [0,0]; F_2= [-8,0]]]

28.) Elipsa je dána svými vrcholy A = [-6,-2]; B = [-2,-2]; C = [-4,-7]; D = [-4,3].Napište její rovnici.

[$25x^2 + 4y^2 + 200x + 16y + 316 = 0$]

29.) Je dána rovnice elipsy $4x^2 + 9y^2 - 24x + 54y + 81 = 0$. Převeďte ji na středový tvar, určete souřadnice středu, ohnisek, hlavních, a vedlejších vrcholů.

[$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$; S = [3,-3] ; A = [0,3]; B = [0,-3]; C = [3,-1]; D = [3,-5]; e = $\sqrt{5}$]

Hyperbola = množina všech bodů v rovině,které mají tu vlastnost,že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od 2 daných různých bodů (ohnisek) je rovna konstantě 2a.

Jeli a = b - rovnoosá hyperbola

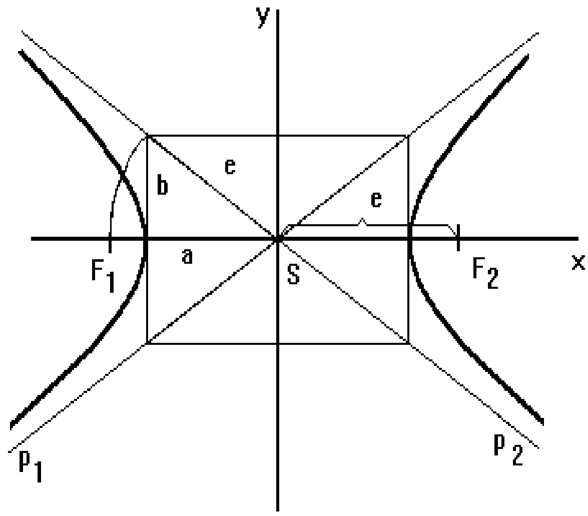
S = střed hyperboly

A,B - vrcholy hyperboly

$F_1S = F_2S$ = e - výstřednost hyperboly

a - velikost hlavní poloosy **Platí: $e^2=a^2+b^2$**

b - velikost vedlejší poloosy



1.) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - rovnice hyperboly se středem v počátku

2.) $$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$ - rovnice hyperboly s obecným středem *S = [m, n]*

V obecném tvaru: $kx^2 - ly^2 + ax + by + c = 0$ *kde* $l > 0$

<u>Asymptoty hyperboly:</u>

Jsou to 2 přímky, které nemají s hyperbolou žádný společný bod:

$$(y - n) = \frac{b}{a}(x - m)$$

$$(y - n) = -\frac{b}{a}(x - m)$$

Cvičení

30.) Napište středovou rovnici hyperboly, je-li S=[0;0]; b = 3 ; F_1 = [-4, 0]

[$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$]

31.) Napište středovou rovnici hyperboly, je-li S=[0;0]; a = 3 ; F_2 = [6, 0]

[$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$]

32.) Napište středovou rovnici hyperboly, je-li S=[0;0]; b = 5 ; F_2 = [0, 7]

[$-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$]

33.) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s x; S=[2;-5]; b = $3\sqrt{2}$ a bod M=[-1,-2] je bodem hyperboly.

[$-\frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(y+5)^2}{6} = 1$]

34.) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s x ; S=[7;1] je-li b = 3 ; e = 5

[$\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$]

35.) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s x ; S=[-2;3] a=6,e=10.

[$\frac{(x+2)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{64} = 1$]

36.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $x^2 - y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$

[S = [-1, 2] ; a = b = 10; e = $\sqrt{20}$]

37.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $64x^2 - 81y^2 - 64x + 108y - 164 = 0$

[S = [$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$] ; a = $\frac{3}{2}$; b = $\frac{4}{3}$; e = $\sqrt{\frac{145}{36}}$]

38.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $x^2 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$

[S = [0, 2] ; a = $2\sqrt{2}$; b = 2; e = $2\sqrt{3}$]

39.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $4x^2 - y^2 + 32x - 4y + 24 = 0$

[S = [-4, -2] ; a =3; b =6; e = $3\sqrt{5}$]

40.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 12 = 0$

[S = [-1, 3] ; a = 2; b = 2; e = $2\sqrt{2}$]

41.) Určete rovnice asymptot hyperboly $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

[y = x + 4 ; y = -x + 2]

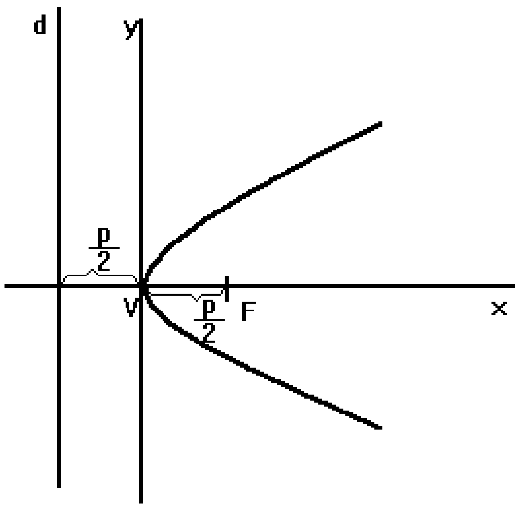
42.) Určete rovnice asymptot hyperboly $4x^2 - y^2 + 32x - 4y + 24 = 0$

[y = 2x + 6 ; y = -2x - 10]

43.) Hyperbola má rovnici $9x^2 - 16y^2 = 144$. Určete její poloosy a výstřednost.

[a = 4; b = 2 ; e = $\sqrt{20}$]

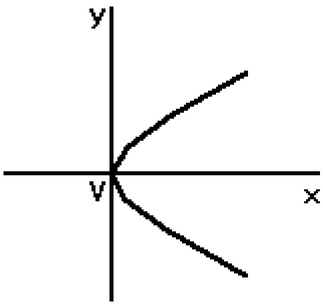
Parabola = množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F a od dané řídící přímky d.

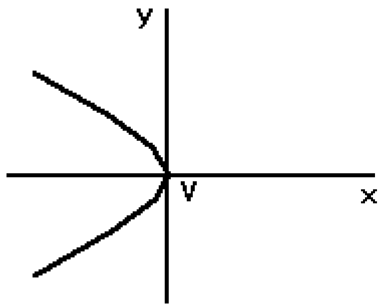


Existují 4 typy rovnice paraboly:

a) $y^2 = 2p\,x$

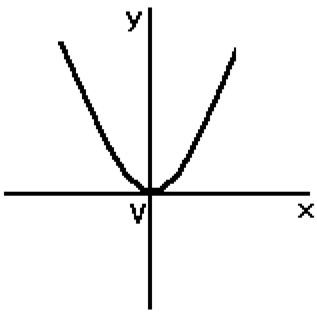
b) $y^2 = -2p\,x$

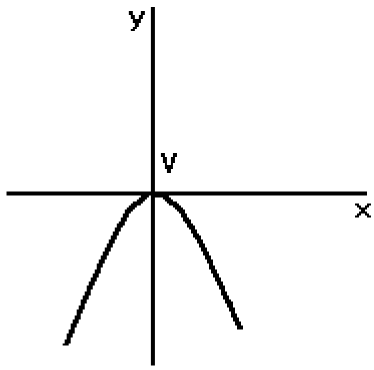




c) $x^2 = 2p\,y$

b) $x^2 = -2p\,y$





Vrchol paraboly leží v počátku souřadného systému.

Je- li vrchol paraboly umístěn v bodě $V = [\,m\,,\,n\,]$, má parabola tyto rovnice:

a) $(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$

b) $(y - n)^2 = -2p\,(x - m)$

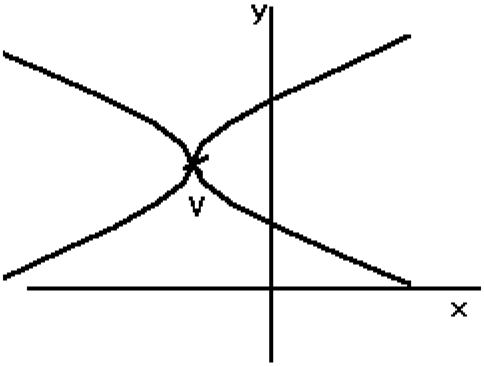
c) $(x - m)^2 = 2p\,(y - n)$

d) $(x - m)^2 = -2p\,(y - n)$

Příklad:

Napište rovnici paraboly, je-li dáno V= [-2 , 3], p =2 a osa paraboly je rovnoběžná s x.

Řešení:



Mohou nastat tyto dva případy

1) $(y - 3)^2 = 4\,(x + 2\,)$

2) $(y - 3)^2 = -4\,(x + 2)$

V obou případech vychází různě i ohnisko a rovnice řídící přímky:

1) F = [-1 , 3] d: x = -3

2) F = [-3 , 3] d: x = -1

Cvičení:

44.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $x^2 = 8y$
[V = [0, 0] ; F = [0, 2]; p = 4; d: y = -2]

45.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $y^2 = -4x$
[V = [0, 0] ; F = [-1, 0]; p = 2; d: x = 1]

46.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $y^2 = 6x$
[V = [0, 0] ; F = [1,5; 0]; p = 3; d: x = -1,5]

47.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $(y – 2)^2 = 10(x + 1)$
[V = [-1, 2] ; F = [1,5; 2]; p = 5; d: x = -3,5]

48.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $(x – 3)^2 = -(y + 4)$
[V = [3, -4] ; F = [3; -4,25]; p = 0,5; d: y = -3,75]

49.) Napište rovnici paraboly s vrcholem V = [3, 2]a bodem na parabole Q = [4, 4], je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y.

[$(x - 3)^2 = 0{,}5(y - 2)$]

50.) Napište rovnici paraboly s vrcholem V = [-4, 2]a bodem na parabole Q = [1, -3], je-li osa paraboly rovnoběžná s osou x.

[$(y - 2)^2 = 5(x + 4)$]

51.) Napište rovnici paraboly s vrcholem V = [-6, -4]a bodem na parabole Q = [-10, 1], je-li osa paraboly rovnoběžná s osou x.

[$(y + 4)^2 = -\frac{25}{4}(x + 6)$]

52.) Napište rovnici paraboly s vrcholem V = [1, -5]a bodem na parabole Q = [-3, -7], je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y.

[$(x - 1)^2 = -8(y + 5)$]

53.) Napište obecnou rovnici paraboly, je-li dáno: F = [0; 0]; p = 4; o = x
[$y^2 – 8x – 16 = 0$; $y^2 + 8x – 16 = 0$]

54.) Napište obecnou rovnici paraboly, je-li dáno: F = [1; 1]; p = 2; o $\parallel$y
[$x^2 – 2x – 4y + 1 = 0$; $x^2 – 2x + 4y – 7 = 0$]

55.) Napište obecnou rovnici paraboly, je-li dáno: F = [-3; -2]; V = [-3, 5]
[$x^2 + 6x + 28y - 131 = 0$]

56.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $y^2 – 8x – 4y + 28 = 0$
[V = [3, 2] ; F = [5; 2]; p = 4; d: x = 1]

57.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $y^2 – x – 2 = 0$
[V = [-2, 0] ; F = [-1,75; 0]; p = 0,5; d: x = -2,25]

58.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $x^2 + 6y - 24 = 0$
[V = [0, 4] ; F = [0; 2,5]; p = 3; d: y = 5,5]

59.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$
[V = [0, -5] ; F = [-1; - 5]; p = 2; d: x = 1]

60.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $x^2 – 6x + 6y + 33 = 0$
[V = [3, - 4] ; F = [3; - 5,5]; p = 3; d: y = - 2,5]

61.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $y^2 + 12x - 12y + 96 = 0$
[V = [-5, 6] ; F = [-8; 6]; p = 6; d: x = -2]

Určení křivky

62.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$
[elipsa, S = [1, 2] ; a = 5, b= 3, e = 4, F_1 = [-3; 2], F_2 = [5; 2]]

63.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $x^2 + y^2 - 4x+ 6y - 3 = 0$
[kružnice, S = [2, -3] ; r = 4]

64.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $y^2 - 8x + 6y - 23 = 0$
[parabola, V = [-4, -3] ; p = 4, F = [-2; -3]; d: x = -6]

65.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$
[hyperbola, S = [-3, 2] ; a = b = 3, e = $3\sqrt{2}$, F_1 = [$-3 - 3\sqrt{2}$; 2], F_2 = [$-3 + 3\sqrt{2}$; 2]]

66.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $3x^2 + 8y^2 - 12x - 16y + 44 = 0$
[není kuželosečka]

67.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $3x^2 + 2y^2 + 18x + 4y + 11 = 0$
[elipsa, S = [-3, -1] ; a = 3; b = $\sqrt{6}$, e = $\sqrt{3}$, F_1 = [-3; $-1-\sqrt{3}$], F_2 = [-3 ; $-1 + \sqrt{3}$] a IIy]

Vzájemná poloha přímky a kružnice nebo elipsy:

a) Kružnice a přímka

b) Přímka a elipsa

- vzájemnou polohu zjistíme řešením soustavy kvadratické (kružnice) a lineární (přímka) rovnice.

Nastanou tyto 3 možnosti:

1.) 2 společné body - sečna

2.) 1 společný bod - tečna

3.) žádný společný bod - vnější přímka

Příklad:

Zjistěte vzájemnou polohu přímky p: $4x + 5y - 25 = 0$ a elipsy: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Řešení:

Jedná se o elipsu se středem v počátku - $S= [0,0], \; a = 5, \; b = 3, \; e = 4$

$F_1= [-4,0] \qquad F_2= [4,0]$

Řešení pomocí soustavy rovnic: $4x +5y -25 =0 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - \frac{4}{5}x$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad /.225$

$9x^2+25y^2 =225$

$9x^2+25(5 -4/5x)^2 =225$

$9x^2+25(25-8x+16/25x^2) =225$

$25x^2-200x +400 =0$

$x^2- 4x + 16 =0$

$D = 16 - 64 =-48$

Rovnice má záporný diskriminant, nemá žádné reálné kořeny ⇨ soustava nemá reálné řešení

=> elipsa a přímka nemají žádný společný bod, přímka je vnější přímkou elipsy.

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A PARABOLY NEBO HYPERBOLY

a) PŘÍMKA A HYPERBOLA

Jejich vzájemnou polohu zjistíme řešením soustavy kvadratické (hyperbola) a lineární (přímka) rovnice.

Mohou nastat tyto případy vzájemné polohy

1.) Žádný společný bod - přímka neprotíná hyperbolu

2.) Jeden společný bod - a) přímka je tečnou hyperboly

b) přímka je rovnoběžná s asymptotou hyperboly a neprochází středem hyperboly

3.) Dva společné body - sečna hyperboly

Zvláštní postavení mají asymptoty hyperboly:

$$(y - n) = \frac{b}{a}(x - m)$$

$$(y - n) = -\frac{b}{a}(x - m)$$

nemají s hyperbolou žádný společný bod a procházejí středem hyperboly.

b) PŘÍMKA A PARABOLA

Vzájemnou polohu zjišťujeme opět řešením soustavy lineární (přímka) a kvadratické (parabola) rovnice.

Mohou nastat tyto případy:

1.) Dva společné body - přímka je tečna paraboly

2.) Jeden společný bod - a) přímka je tečna paraboly

b) přímka je rovnoběžná s osou - je sečnou, protíná parabolu v jednom bodě

3.) Žádný společný bod - přímka leží vně paraboly

Příklad:

Určete vzájemnou polohu přímky p: $2x + 2y - 5 = 0$

a paraboly p_a: $y^2= 10x$

Řešení:

p_a: V = [0,0]

p = 5

F = [2,5;0]

Řešení soustavy: $2x + 2y - 5 = 0$ $x = \frac{5 - 2y}{2}$

$y^2 = 10x$

$y^2 = 25 - 10y$

$y^2 + 10y - 25 = 0$

$D = 100 + 100 = 200$

$D = 10\sqrt{2}$ Soustava rovnic by měla dvě řešení - přímka je sečna.

$y_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{2}$ $x = \dfrac{5-2y}{2}$ $x_1 = \dfrac{5+10+5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{15+5\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \dfrac{5+10-5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{15-5\sqrt{2}}{2}$

$P_1 = [\dfrac{15-5\sqrt{2}}{2}; 5+5\sqrt{2}]$

$P_2 = [\dfrac{15+5\sqrt{2}}{2}; 5-5\sqrt{2}]$

Cvičení:

68.) Určete vzájemnou polohu přímky $x + 2y - 14 = 0$ a elipsy $x^2 + 4y^2 = 100$. Případně určete průsečíky.

[$P_1 = [8, 3]$; $P_2 = [6, 4]$]

69.) Zjistěte vzájemnou polohu přímky $3x - y + 2 = 0$ a elipsy $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Případně určete průsečíky.

[$P_1 = [0, 2]$; $P_2 = \left[-\dfrac{48}{37}; -\dfrac{70}{37}\right]$]

70.) Přímka $3x + 4y + c = O$ je tečnou kružnice $x^2 + y^2 = 25$. Určete c.

[$c = \pm 25$]

71.) Přímka $y = kx + 2$ je tečnou paraboly $y^2 = 4x$. Určete k

[$k = \dfrac{1}{2}$]

72.) Určete vzájemnou polohu přímky a paraboly $4x^2 - 9y = 72$

$2x - y - 8 = 0$

[$P_1 = [0, -8]$; $P_2 = \left[\dfrac{9}{2}; 1\right]$]

73.) Přímka $3x – 4y + 6 = 0$ je tečnou paraboly $y^2 = 2px$. Určete p.

[$p = \dfrac{9}{4}$]

74.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $x – 2y + 2 = 0$ a kuželosečky $x^2 + 4y^2 + 8x – 8y + 4 = 0$. Určete souřadnice společných bodů.

[$P_1 = [0, 1]$; $P_2 = [-4, -1]$; sečna]

75.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $x – y + 3 = 0$ a kuželosečky $x^2 + y^2 = 9$. Určete souřadnice společných bodů.

[$P_1 = [-3, 0]$; $P_2 = [0,3]$; sečna]

76.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $x + y - 2 = 0$ a kuželosečky $y^2 = -8x$. Určete souřadnice společných bodů.

[$T = [-2, 4]$; tečna]

77.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $2x – 3y = 0$ a kuželosečky $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. Určete souřadnice společných bodů.

[nesečna – asymptota hyperboly]

78.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $x = -3 + 3t$; $y = 2 – t$ a kuželosečky $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$. Určete souřadnice společných bodů.

[$P_1 = [0, 1]$; $P_2 = [3, 0]$; sečna]

79.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $x + y - 1 = 0$ a kuželosečky $x^2 + y^2 - 6x – 4y - 3 = 0$. Určete souřadnice společných bodů.

[$P_1 = [-1, 2]$; $P_2 = [3, -2]$; sečna]

80.) Určete vzájemnou polohu přímky p: $x = 5+ 2t$; $y = -1 + t$ a kuželosečky $2x^2 + y^2 - 8x - 4y - 6 = 0$. Určete souřadnice společných bodů.

[T = [3, -2]; tečna]

81.) Určete vzájemnou polohu přímky p: A = [4, 1]; B = [1, -2] a kuželosečky $3x^2 - 15y^2 - 45 = 0$. Určete souřadnice společných bodů.

[nesečna]

82.) Napište rovnici tečny kuželosečky $x^2 = 4y$ v jejím bodě T = [4,4].

[$2x - y - 4 = 0$]

83.) Napište rovnici tečny kuželosečky $x^2 - y^2 = 16$ v jejím bodě T = [-5,-3].

[$5x - 3y + 16 = 0$]

84.) Napište rovnici tečny kuželosečky $x^2 + y^2 = 25$ v jejím bodě T = [-3,4].

[$3x - 4y + 25 = 0$]

85.) Napište rovnici tečny kuželosečky $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ v jejím bodě T = [3,2].

[$x = 3$]