

## Aritmetická posloupnost

= posloupnost čísel, kde 2 sousední členy se liší vždy o totéž číslo - diferenci **d**.

např. {2,5,8,11,14,17,...} posloupnost zadaná výčtem

V této posloupnosti je první člen  $a_1 = 2$ , diference  $d = 3$  (sousední členy se liší vždy o 3)

$$\text{Platí: } \mathbf{a_{n+1} = a_n + d} \qquad \mathbf{d = a_{n+1} - a_n}$$

### **Vzorec pro n-tý člen**

*Odvodíme na příkladě:*

Příklad:

Je dána aritmetická posloupnost, ve které platí:  $a_1 = 1, d = 3$ , určete desátý člen.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + d = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d = 1 + 6 = 7$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d = 1 + 9 = 10$$

.....

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 27 = 28$$

Odvodili jsme vzorec pro n - tý člen:  $\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Pokud je posloupnost dána libovolnými dvěma členy  $a_r, a_s$ , pak platí vztah:

$$\mathbf{a_s = a_r + (s-r)d}$$

Příklad:

Je dána aritmetická posloupnost, ve které platí:  $a_4 = -1, a_8 = 7$  Určete diferenci a dvacátý člen.

Použijeme vzorec  $\mathbf{a_s = a_r + (s-r)d}$

$$a_8 = a_4 + 4d$$

$$7 = -1 + 4d$$

$$\mathbf{d = 2}$$

$$a_{20} = a_8 + 12d$$

$$a_{20} = 7 + 12 \cdot 2 = 7 + 24 = \underline{31}$$

### **Součet n-členů aritmetické posloupnosti:**

Příklad:

Určete součet všech přirozerných číse od 1 do 100.

Řešení:

Jedná se o aritmetickou posloupnost, kde  $a_1 = 1, d = 1$ .

Její součet napíšeme takto:

$$+ \begin{array}{l} S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95 + \dots + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

---

$$2 S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{100 \cdot 101}$$

$$2 s_{100} = 100 \cdot 101$$

$$s_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$$

Obecně platí:  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Příklad:

V aritmetické posloupnosti je  $a_2 = 6$ ,  $a_5 = 18$ . Určete součet prvních dvaceti členů.

Řešení:

Pro dosazení do vzorce  $s_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20})$  potřebujeme znát člen  $a_{20}$ . K jeho nalezení potřebujeme určit diferenci  $d$ .

Platí:

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$d = \frac{a_5 - a_2}{3} = \frac{18 - 6}{3} = 4$$

$$a_1 = a_2 - d = 6 - 4 = 2$$

Člen  $a_{20}$ :  $a_{20} = a_5 + 15d = 18 + 15 \cdot 4 = 78$

Nyní můžeme určit  $s_{20}$ :  $s_{20} = 10(2 + 78) = 800$

Příklad:

Posloupnost zadaná pomocí n-tého členu:  $\{4n - 3\}_{n=1}^{\infty}$

má tyto členy  $a_1=1$ ;  $a_2=5$ ;  $a_3=9$  .....  $d=4$

Důkaz, že se jedná o aritmetickou posloupnost:

člen  $a_n = 4n - 3$

člen  $a_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 4 - 3 = 4n + 1$

Mělo by platit:  $a_{n+1} - a_n = d$

Po dosazení dostaneme:  $4n + 1 - 4n - 3 = d$

$$d = -2$$

Dokázali jsme, že se jedná o aritmetickou posloupnost s diferencí  $d = -2$ . Pokud by při řešení z rovnice nevypadlo  $n$ , posloupnost by aritmetická nebyla.

Cvičení:

1. Najděte součet prvních 7 členů aritmetické posloupnosti, víte-li, že 6. člen je (-6) a součet 2. a 5. členu je 3.
2. V aritmetické posloupnosti je člen  $a_4=3,4$ ;  $a_7=5,8$ . Určete diferenci  $d$ ,  $a_1$ ,  $a_{10}$  a součet  $s_{10}$ .
3. Železné roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy dolní. Do kolika vrstev se složí 102 roury, má-li nejkratší vrstva 3 roury? Kolik rour má vrstva nejspodnější?
4. V aritmetické posloupnosti je  $a_4 = 72$ ,  $a_8 = 128$ , kolik členů této posloupnosti dává součet 504?  
[ 7 ]
5. Jsou-li prvky  $a_1$ ,  $d$ ,  $a_n$ ,  $n$ ,  $s_n$  prvky aritmetické posloupnosti, určete zbývající v případech že:
  - a)  $a_1 = 15$ ;  $d = \frac{5}{3}$ ;  $a_{13} = ?$ ;  $s_{13} = ?$
  - b)  $a_{20} = -66,5$ ;  $d = -\frac{7}{2}$ ;  $a_1 = ?$ ;  $s_{40} = ?$
  - c)  $a_1 = -15$ ;  $a_{12} = 21$ ;  $d = ?$ ;  $s_{12} = ?$

d)  $a_1 = 5$  ;  $s_{15} = 0$  ;  $d = 0$  ;  $a_{15} = ?$

e)  $a_n = 40$  ;  $d = \frac{1}{2}$  ;  $s_n = 1\,007,5$  ;  $n = ?$  ;  $a_1 = ?$

[ a) 35;325 b) 0;-2730 c)  $3\frac{3}{11}$ ;36 d)  $-\frac{5}{7}$ ; -5 e)  $n = 31$ ;130; $a_1 = 25$ ;-24,5 ]

6. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou strany dlouhé , je-li obsah trojúhelníku  $S = 6 \text{ dm}^2$ ?

[ 3 ; 4 ; 5 ]

7. V aritmetické posloupnosti platí:  $a_1 + a_5 = -8$  ;  $a_2 + a_6 = -4$  . Napište prvních pět členů této posloupnosti.

[ -8 ; -6 ; -4 ; -2 ; 0 ]

8. Určete  $s_{10}$  v aritmetické posloupnosti ,ve které platí  $a_2 + a_5 = 10$  ;  $a_3 + a_7 = 16$  .

[ 90 ]

9. Určete prvních šest členů posloupnosti, která je dána rekurentním vztahem a podmínkami:

a)  $a_1 = 1$  ;  $a_{n+1} = a_n^2 - n - 1$

b)  $a_1 = 2$  ;  $a_{n+1} = a_n^2 - n - 1$

c)  $a_1 = 1$  ;  $a_2 = 2$  ;  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

[a)1,-1,-2,0,-5,19 ; b)2,2,1,-3,4,10 ; c)1,2,1,-1,-2,-1 ]

10. Rozhodněte, zda posloupnost s  $n$ -tým členem  $a_n = \{n - 50\}_{n=1}^{\infty}$  je aritmetická.

[ ne ]

11. Zjistěte, zda čísla 77 , 127 jsou členy aritmetické posloupnosti kde  $a_1 = -\frac{11}{7}$  ,  $a_2 = 0$ .

[77 ano , 127 ne ]

12. Za vykopání studny bylo zapláceno 208 Kč. Jak hluboká je studna, jestliže vykopání prvního metru stálo 12 Kč, a každý následující metr byl o 4 Kč dražší? Kolik stálo vykopání posledního metru?

[ hloubka  $n = 8 \text{ m}$  ,  $a_8 = 40 \text{ Kč}$  ]

13. Turista ujde první den 40 km a každý další den o 3 km méně než den předcházející. Určete, kolik kilometrů ujde za týden.

[ 217 km ]

14. Určete součet všech přirozených čísel dělitelných třemi a menších než tisíc.

[ 166833 ]

15. Aritmetická posloupnost je určena prvním členem  $a_1 = 3$  a diferencí  $d = 2$ . Kolik prvních členů této posloupnosti je třeba sečíst, aby součet byl 120?

[ 10 ]