

Exponenciální funkce

Je to funkce daná funkčním předpisem $f: y = a^x$ kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné
 Graf exponenciální funkce se nazývá exponenciální křivka (exponenciála).

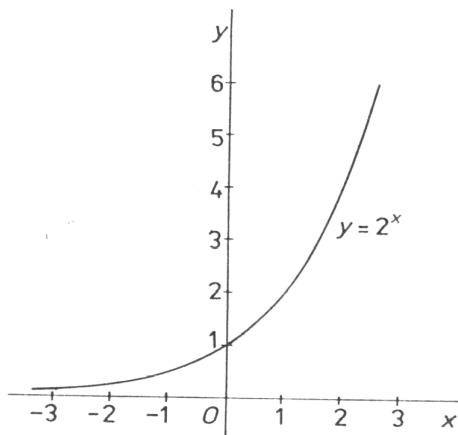
Příklad:

Sestrojte graf funkce $f: y = 2^x$

Řešení:

K sestrojení grafu použijeme tabulku:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



V příkladě bylo $a > 1$ funkce je rostoucí

Příklad:

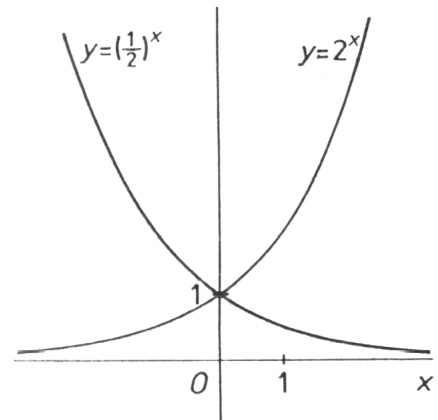
Sestrojte graf funkce

$$f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Řešení:

K sestrojení grafu použijeme tabulku:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



V příkladě bylo $a < 1$ funkce je klesající.

Tyto dva příklady představovaly dvě základní skupiny exponenciálních funkcí:

a) $f: y = a^x$ kde a je číslo větší než 1

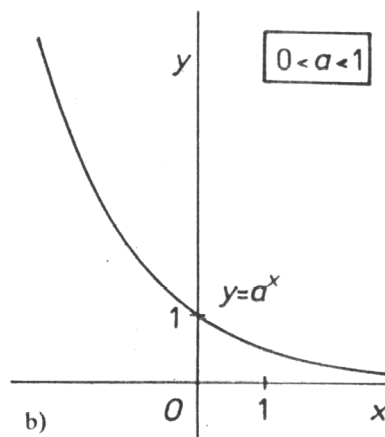
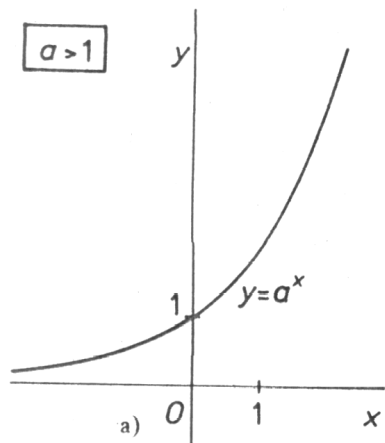
Graf funkce má tento tvar:

- funkce je rostoucí
- prochází vždy bodem $[0, 1]$

b) $f: y = a^x$ kde a je číslo větší než 0 a menší než 1 ($0 < a < 1$)

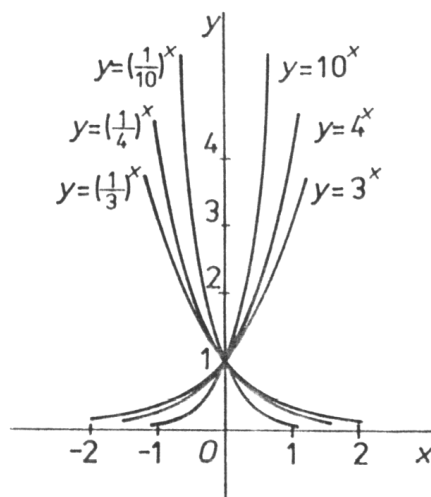
Graf funkce má tento tvar:

- funkce je klesající
- prochází vždy bodem $[0, 1]$



⇒ Mezi exponenciálními funkcemi má zvláštní význam funkce $y = e^x$, kde číslo e je Eulerova konstanta a její přibližná hodnota je $e = 2,71828$.

Některé další exponenciální funkce:



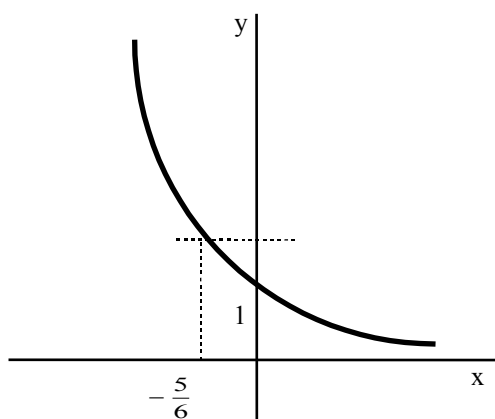
Graf exponenciální funkce se využívá při řešení takovýchto příkladů:

Příklad 1:

Určete zda je číslo $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}$ větší nebo menší než jedna.

Řešení:

Načrtneme si graf funkce $f: y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$



Na osu x vyneseme hodnotu $-\frac{5}{6}$

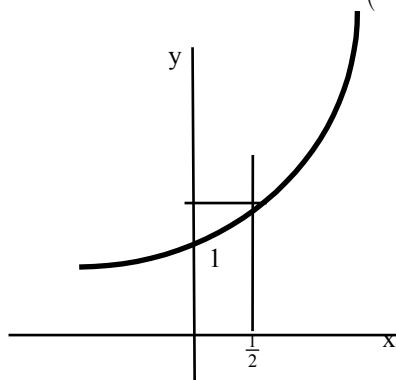
je vidět, že y je větší než 1 tedy $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} > 1$

Příklad 2:

Určete zda je číslo $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna.

Řešení:

Načrtne si graf funkce $f : y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$



Na osu x vyneseme hodnotu $\frac{1}{2}$

je vidět, že y je větší než 1 tedy $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$

Příklad 3:

Mezi čísla m a n doplňte znaménko nerovnosti:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^m \text{ } \left(\frac{7}{8}\right)^n \quad m ??? n$$

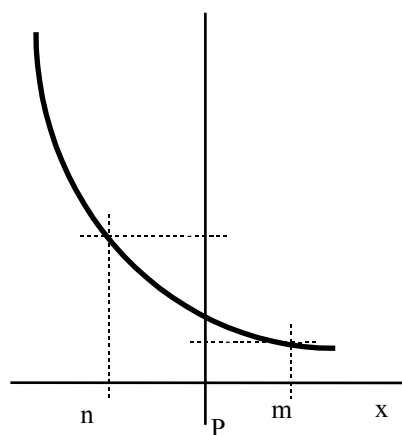
Řešení:

Načrtne si graf funkce $f : y = \left(\frac{7}{8}\right)^x$

Zvolíme si na ose x čísla m a n tak, aby platilo:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^m < \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

číslo m leží více vpravo, tedy musí být $m > n$



Příklad 4:

Určete zda číslo a je větší než jedna, platí - li : $a^{-\frac{2}{3}} > a^4$

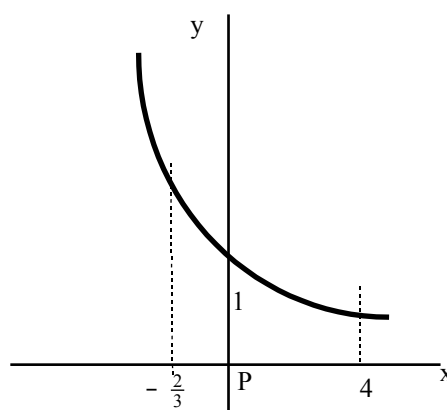
Řešení:

Protože neznáme hodnotu čísla a nemůžeme určit, zda je funkce rostoucí nebo klesající.

Podobu grafu odhadneme tak, že nejprve vyneseme na osu x čísla

$-\frac{2}{3}$ a 4 .

Musí platit $a^{-\frac{2}{3}} > a^4$. Podle toho doplníme funkci - funkce je klesající - tedy $a < 1$



Cvičení:

1. Určete zda je číslo $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

2. Určete zda je číslo $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

3. Určete zda je číslo $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

4. Určete zda je číslo $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

5. Mezi čísla m a n doplňte znaménko nerovnosti: $\left(\frac{1}{8}\right)^m < \left(\frac{1}{8}\right)^n$ $m ??? n$

6. Mezi čísla m a n doplňte znaménko nerovnosti: $\left(\frac{9}{8}\right)^m > \left(\frac{9}{8}\right)^n$ $m ??? n$

7. Určete zda číslo a je větší než jedna, platí - li : $a^{-5} > a^2$

8. Určete zda číslo a je větší než jedna, platí - li : $a^{-3} < a^4$

Inverzní funkce:

Inverzní funkci k dané funkci f označujeme f^{-1} a získáme ji způsobem, který bude ukázán na následujícím příkladě:

Příklad:

Je dna funkce $f: y = 2x - 4$, najděte k ní funkci inverzní.

Řešení:

V daném funkčním předpise nejprve zaměníme x a y : $x = 2y - 4$

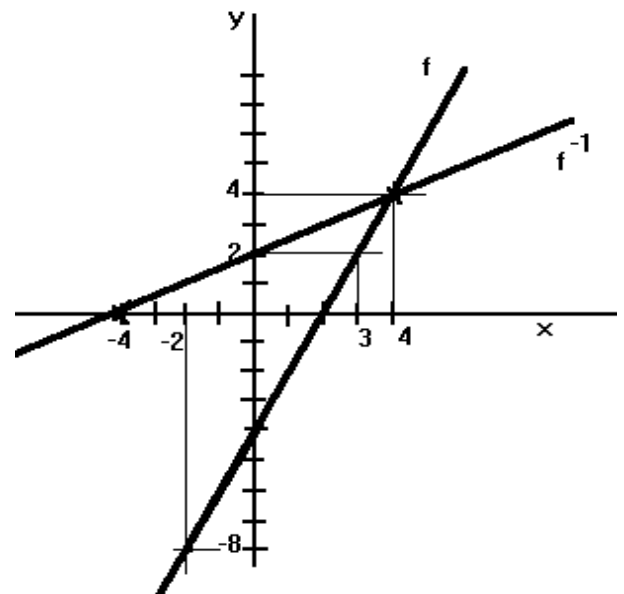
Potom z rovnice vyjádříme y : $x + 4 = 2y$ / :2
 $y = 0,5x + 2$

$f: y = 2x - 4$ $f^{-1}: y = 0,5x + 2$

x	-2	3
y	-8	2

x	-4	4
y	0	4

Na obrázku je vidět, že graf funkce f a funkce f^{-1} jsou osově souměrné podle osy I. a III. kvadrantu.



Cvičení:

1. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $f: y = 2x - 3$
2. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $f: y = -3x + 6,5$
3. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $f: y = \frac{5}{2x}$
4. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $f: y = -\frac{5}{x}$