Geometrická posloupnost

Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Tuto posloupnost nazveme geometrická, jestliže pro každé dva po sobě následující členy platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kde q je reálné číslo , $q \neq 0$, $a_1 \neq 0$

neboli platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Příklad geometrické posloupnosti: { 2 , 4, 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , ...}
každý člen je dvojnásobkem členu předchozího
$a_1 = 2$, $q = 2$

Určení n - tého členu geometrické posloupnosti:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Dále platí tento vztah:

$$a_r = a_s . q^{r-s}$$

Vzorec pro součet n - členů geometrické posloupnosti:

1) $q \neq 1$
$$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2) $q = 1$
$$s_n = n \cdot a_1$$

Příklad:
V geometrické posloupnosti je $a_3 = 12$, $a_7 = -96$. Určete a_1 a q .
Řešení:

$a_7 = a_3 \cdot q^4$ odtud $q = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = \sqrt[3]{\frac{-96}{12}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$ odtud $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{12}{4} = 3$

Cvičení:

1. Určete součet prvních n členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:
   a) $a_1 = 2$, $q = -2$, $n = 5$ b) $a_1 = 16$, $q = 0{,}5$, $n = 6$
   c) $a_1 = -5$, $q = 1$, $n = 10$ d) $a_1 = -5$, $q = -1$, $n = 10$
   e) $a_1 = 0{,}75$, $q = 2/3$, $n = 8$ f) $a_1 = \sqrt{3}, q = \sqrt{2}, n = 6$

   [a)22 ; b)31,5 ; c)-50 ; d)0 ; e) $\frac{9}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^6$; f) $7.\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$]
2. Určete n - tý člen geometrické posloupnosti , jestliže platí $a_1 = 2$, $q = 2$, $s_n = 2186$.
   [$a_7 = 2.3^6$]
3. Zjistěte, která z čísel jsou členy geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 = 27$, $q = -\frac{2}{3}$.
4. Dokažte, že čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5} + \sqrt{2}$ jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.
5. Najděte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 = -2$; $a_2 = 4$.
   [682]

Užití geometrické posloupnosti

1) Úlohy na složené úrokování:

Příklad:
Do peněžního ústavu vložíme částku $\mathbf{a_0}$. Vklad se každoročně úročí **p** procenty. Kolik budeme mít naspořeno po **n** letech?

Řešení:
vklad .... a_0

za 1 rok .... $a_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$

za 2 roky .... $a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{p}{100} = a_1\left(1+\frac{p}{100}\right)$

•

•

po n letech ...... a_n

Máme určit n-tý člen geometrické posloupnosti s prvním členem a_0 a $q = \left(1+\frac{p}{100}\right)$

$$a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

Příklad:
Jakou částku získáme za 10 let , uložíme-li na vkladový list 100 000,- Kč při ročních úrocích 8 % ?

Řešení:

$$a_0 = 100000$$

$$a_{10} = 100000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{10} = 215892{,}499$$

Získáme částku 215 892,499 Kč .

2) Odpisy strojů a zařízení:

Příklad :
Cena nového stroje činila a_0 Kč. Každoročně se cena tohoto stroje snižovala o p procent . Kolik činila cena stroje po n letech?

Řešení:
cena na počátku .... a_0

cena za jeden rok .... $a_1 = a_0 - a_0\left(\frac{p}{100}\right) = a_0\left(1-\frac{p}{100}\right)$

cena za dva roky .... $a_2 = a_1 - a_1 \cdot \frac{p}{100} = a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)$

•

•

cena za n let .... a_n

Máme určit n-tý člen geometrické posloupnosti s prvním členem a_0 a $q = \left(1-\frac{p}{100}\right)$

$$a_n = a_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Příklad:

Do podniku byl zakoupen stroj v hodnotě 400 000,- Kč. Z ceny stroje se každoročně odepisuje 15% . Jaká bude hodnota stroje za 12 let?

Řešení:

Cena na počátku .... $a_0 = 400\,000$

Cena po 12 letech: $a_{12} = 400000.\left(1 - \frac{15}{100}\right)^{12} = 400000.0{,}85^{12} = 56896{,}702$

Cena stroje po 12 letech bude činit 56 896,702 Kč.

3) Úlohy o pravidelném střádání:

Příklad:

Do peněžního ústavu vkládáme na počátku každého roku částku a_0. Vklad je každoročně úročen p procenty. Kolik budeme mít naspořeno na počátku n. roku i s dalším vkladem ?

Řešení:

vklad na počátku 1. roku...... $A_1 = a_0$

na počátku 2.roku... $A_2 = a_0 .\left(1 + \frac{p}{100}\right) + a_0$ pro jednoduchost si $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ označíme q

na počátku 3.roku.....$A_3 = (a_0 .q + a_0).q + a_0 = a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0$

na počátku 4.roku.....$A_4 = a_0 .q^3 + a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0$

•

•

na počátku n.roku.....$A_n = a_0 .q^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0$

Jedná se o součet nčlenů geometrické posloupnosti .

Částka na počátku n.roku: $A_n = a_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ kde $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Příklad:

Pan Novák pravidelně na počátku každého roku ukládá na vkladní knížku 5000, - Kč. Vkladní knížka se každoročně úročí 6 procenty. Kolik bude mít naspořeno na začátku 15. roku (i s novým vkladem) ?

Řešení:

Vklad: 5000,- Kč

Částka na poč. 15. roku: $A_{15} = 5000.\frac{1{,}06^{15} - 1}{1{,}06 - 1} = 116\,379{,}849$

Na počátku 15. roku bude mít pan Novák naspořeno 116 379,849 Kč.

Příklad:

Do peněžního ústavu vkládáme na počátku každého roku částku a_0. Vklad je každoročně úročen p procenty. Kolik budeme mít naspořeno **na konci** n - tého roku?

Řešení:

vklad .... $A_0 = a_0$

po 1 roce .... $A_1 = a_0 .\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ pro jednoduchost si $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ označíme q

po 2 letech .... $A_2 = (a_0 .q + a_0).q = a_0 .q^2 + a_0 .q$

po 3 letech .... $A_3 = (a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0).q = a_0 .q^3 + a_0 .q^2 + a_0 .q$

•

•

po n letech ...$A_n = a_0 .q^n + a_0 .q^{n-1} + ... + a_0 .q^2 + a_0 .q = q.(a_0 .q^{n-1} + ... + a_0 .q^2 + a_0 .q)$
Jedná se o součet n členů geometrické posloupnosti násobený ještě navíc q.

Částka po n -letech: $$A_n = a_0.q.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$ kde $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Příklad:
Pan Horák pravidelně na počátku každého roku ukládá na vkladní knížku 5000, - Kč. Vkladní knížka se každoročně úročí 6 procenty. Kolik bude mít naspořeno na konci 14. roku (i s nově připsanými úroky) ?

Řešení:
Vklad: 5000,- Kč

Částka konci 14. roku: $A_{14} = 5000.1{,}06.\frac{1{,}06^{14} - 1}{1{,}06 - 1} = 111\,379{,}849425$

Na konci 14. roku bude mít pan Horák naspořeno 111 379,849 Kč.

Cvičení:

6. Město má 90 000 obyvatel. Jejich počet se každoročně zvyšuje o 1,3% . Určete počet obyvatel města za 15 let.
[109 240]
7. Cena nového stroje je 150 000,- Kč , každoročně se odepisuje 5% ceny stroje z předchozího roku . Určete cenu stroje po deseti letech.
[89 810]
8. Pan Kovář si uložil na vkladový list částku 50 000,- Kč. Určete, na kolik tato částka vzroste za 10 let, úročí-li se 5% ročně.
[81 445]
9. Pan Kovář si uložil na vkladový list částku 50 000,- Kč. Určete, na kolik tato částka vzroste za 10 let, úročí-li se 5% ročně a na konci každého roku se z úroků strhává 15% daň.
[75 811]
10. Určete , jakou částku musí paní Bílá uložit,aby při 5% úroku měla naspořeno za 15 let 100 000 Kč.(z úroků neplatí daň)
[48 102]
11. Určete, při jaké úrokové míře se obnos vložený do spořitelny za dobu deseti let zdvojnásobí.
[8,5%]
12. Pan Šetřílek si ukládá počátkem každého roku 5000,- Kč. Určete, jakou částku bude mít na konci 15. roku při úrocích 4% .
[99 026]
13. Stroj ztrácí opotřebováním každoročně 10% své původní ceny . Určete po kolika letech klesne jeho cena na polovinu. [6,5]
14. Množství dřeva v lese každoročně naroste o 2% . . Určete, za jak dlouho se zdvojnásobí.
[35 let]
15. Paní Nová ukládá počátkem každého roku 10 000,- Kč. Určete, jakou částku bude mít za deset let při úrokové míře 5%, je-li daň z úroků 15% .
[126 624]
16. Určitý druh baktérií se rozmnožuje tak, že každá bakterie se za půl hodiny rozdělí na dvě. Kolik bakterií vznikne za 12 hodin?
[16 777 215]
17. Ve městě žije v současné době 85 600 obyvatel. Kolik obyvatel lze ve městě očekávat za 6 let , jestliže se předpokládá průměrný roční přírůstek 1,7% ?
[94 700]