Tabulky sin α, cos α, tg α, cotg α
(α = 30°,45°, 60°)

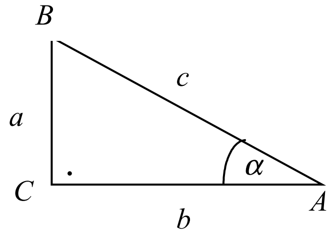
V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou definovány funkce sin , cos, tg , cotg libovolného úhlu takto:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ protilehlá odvěsna ku přeponě

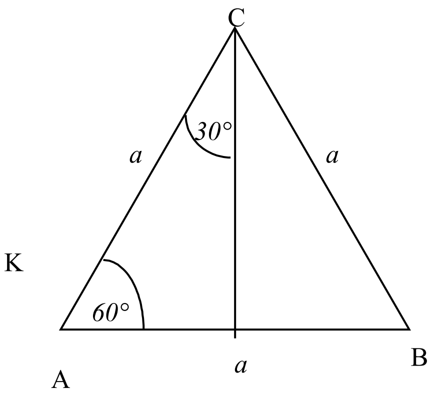
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ přilehlá odvěsna ku přeponě

$tg\alpha = \frac{a}{b}$ protilehlá odvěsna ku přilehlé odvěsně

$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ přilehlá odvěsna ku protilehlé odvěsně



Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. V tomto trojúhelníku sestrojíme výšku v_c. Tato výška půlí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých se vyskytují úhly velikosti 30° a 60°. Z tohoto obrázku můžeme odvodit hodnoty goniometrických funkcí těchto úhlů.



Nejprve určíme Pythagorovou větou v_c:

$$v_c = \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^o = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg30^o = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tg60^o = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot g30^o = \frac{1}{tg30^o} = \sqrt{3} \qquad \cot g60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

odvození hodnot goniometrických funkcí úhlu 45° použijeme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC:
Nejprve určíme Pythagorovou větou c:

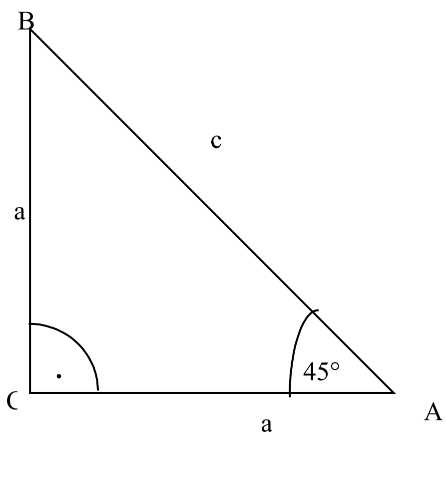
$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\sin 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^o = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot g45^o = 1$$



Z odvozených hodnot sestavíme tabulku a doplníme ji i o úhly 0°a 90°.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos α	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tg α	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**nedef.**
cotg α	**nedef.**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Goniometrické vzorce

1) Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$tg x = \frac{1}{co\ tg x}$$

2) Vzorce dvojnásobného argumentu

$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3) Vzorce polovičního argumentu

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

4) Součtové vzorce

1) $\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

2) $\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

3) $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

4) $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

5) $\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

6) $\sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

7) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

8) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

Příklad:

Je dána goniometrická funkce **sin x = 0,8** . Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu. Využijte základní vztahy mezi funkcemi.

Řešení:

Nejprve vypočteme **cos x** . Využijeme vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Vyjádříme a dosadíme $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$\cos x = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Dále využijeme vztah $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad tgx = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

$$\cot g x = \frac{1}{tgx} = \frac{3}{4}$$

Řešení bylo provedeno pouze v prvním kvadrantu.

Příklad:

Je dána goniometrická funkce **tg x = 0,75** . Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu. Využijte základní vztahy mezi funkcemi.

Řešení:

První vypočteme hodnotu funkce **cotg x** ze vztahu $\cot g\, x = \dfrac{1}{tgx} = \dfrac{4}{3}$

Dále dosadíme do vztahu $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ zadanou hodnotu **tg x** a vzorec $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$\frac{3}{4} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \Big/ ^2$$

$$\frac{9}{16} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$9(1 - \sin^2 x) = 16 \sin^2 x$$

$$9 - 9\sin^2 x = 16\sin^2 x$$

$$9 = 25\sin^2 x$$

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

Nakonec určíme **cos x** : $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25 - 9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Příklad:

Zjednodušte výraz: $\dfrac{1}{1 + \cot g^2 x} + \left(\dfrac{\cos x - \sin x}{1 - tgx}\right)^2$

Řešení:

$$\frac{1}{1 + \cot g^2 x} + \left(\frac{\cos x - \sin x}{1 - tgx}\right)^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \left(\frac{\cos x - \sin x}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}}\right)^2 = \frac{1}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} + \left(\frac{\cos x - \sin x}{\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}}\right)^2 =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Příklad:

Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -1$

Cvičení:

1. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^2 x - 1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$

[$\cot g^2 x$]

2. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1 + \cot g^2 x}{1 + tg^2 x}$

[$\cot g^2 x$]

3. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin x - \cos x}{(\cot gx - 1)}$

[$-\sin x$]

4. Zjednodušte výraz: $1 - \dfrac{\cot g^2 x}{1 + \cot g^2 x}$

[$\sin^2 x$]

5. Zjednodušte výraz: $\dfrac{2\cos^2 x - 1}{(1 - \sin^2 x)(1 - tg^2 x)}$

[1]

Příklad:
Určete hodnotu funkce sin 75°.

Řešení:
Úhel rozložíme na součet dvou známých úhlů: sin (45°+ 30°)
Použijeme vzorec: $\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

$$\sin 75° = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Příklad:
Určete hodnotu funkce cos 105°.

Řešení:
Úhel rozložíme na součet dvou známých úhlů: cos (60°+ 45°)
Použijeme vzorec: $\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

$$\cos 105° = \cos 60°.\cos 45° - \sin 60°.\sin 45° = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}$$

Příklad:

Určete hodnotu $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Řešení:

Funkci budeme posuzovat jako funkci polovičního argumentu k funkci $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Použijeme vzorec: $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Příklad:
Převeďte na funkci tg.

Řešení:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{1}{\cos y}}=\frac{\sin x-\cos x\cdot\frac{\sin y}{\cos y}}{\sin x+\cos x\cdot\frac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\cos x(\frac{\sin x}{\cos x}-tgy)}{\cos x(\frac{\sin x}{\cos x}+tgy)}=\frac{tgx-tgy}{tgx+tgy}$$

*1) *2)

*1) rozšíříme $\frac{1}{\cos y}$

*2) vytkneme cos x

Příklad:
Vypočtěte tg 345°

Řešení:
tg 345°
1) odečteme periodu 180°………….. tg 345°= tg 165°
2) rozložíme na tg(120°+ 45°)
tg 120°= tg (180°- 60°) = - tg 60°= $-\sqrt{3}$
tg 45° = 1
3) Použijeme vzorec:

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}=\frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-\frac{2(2-\sqrt{3})}{2}=-2+\sqrt{3}$$

*3) *4)

*3) usměrníme zlomek $1-\sqrt{3}$ *4) vytkneme 2 a krátíme

Upravte na součin: sin 3x – sin x
Řešení:

$$\sin 3x-\sin x=2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=2\cos 2x\sin x$$

Příklad:
Převeďte na funkce s jednoduchým argumentem $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Řešení:

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin^2 x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot gx$$