Goniometrické rovnice

Jsou to rovnice, kde se neznámá vyskytuje v argumentu goniometrické funkce.

1. Základní goniometrická rovnice:

a) typ: *f(x) = c*

Příklad: $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_1 = 30°$

$x_2 = 150°$

Obecně: $x_1 = 30° + k \cdot 360°$

$x_2 = 150° + k \cdot 360°$

Příklad: $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = 30° + k \cdot 180°$

Pro funkce **tg x** a **cotg x** stačí najít pouze jedno řešení, další získáváme přičtením k - násobku periody 180°. Pro funkce **sin x** a **cos x** musíme hledat řešení dvě, perioda je 360°.

Příklad: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad x' = 45°$

Funkce sin x je záporná v III. a ve IV. kvadrantu:

$x_1 = 225° + k \cdot 360°$ $\qquad x_2 = 315° + k \cdot 360°$

b) typ: *f(x + d) = c*

Příklad: $\sin(x + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zavedeme substituci: $y = x + 30°$

$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = 45° + k \cdot 360°$ $\qquad x_1 = 15° + k \cdot 360°$

$y_2 = 135° + k \cdot 360°$ $\qquad x_2 = 105° + k \cdot 360°$

Příklad: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

substituce $\frac{\pi}{3} - 2x = y$ $\qquad x = \frac{\pi}{6} - \frac{y}{2}$

$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

k je libovolné celé číslo, znaménko můžeme zanedbat

$y_1 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - k\pi = k\pi$

$y_2 = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} - k\pi = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

c) typ: *f(n.x + d) = c*

Příklad: $\cos(3x - 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zavedeme substituci $3x - 60° = y$ => $x = \frac{y + 60°}{3}$

$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = 45° + k.360°$

$y_2 = 315° + k.360°$

$$x_1 = \frac{45° + k.360° + 60°}{3} = \frac{105° + k.360°}{3} = 35° + k.120°$$

$$x_2 = \frac{315° + k.360° + 60°}{3} = \frac{375° + k.360°}{3} = 125° + k.120°$$

2) Složitější goniometrické rovnice:

a) Obsahující jen 1 goniometrickou funkci

Příklad: $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$

řešíme substitucí : $y = \cos x$

$2y^2 + 7y + 3 = 0$

$D = 25$ $y_{1,2} = \frac{-7 \pm 5}{4}$ $y_1 = -3$

$y_2 = -\frac{1}{2}$

$\cos x = -3$ není definováno

$\cos x = -0{,}5$ $x_1 = 120° + k.360°$

$x_2 = 240° + k.360°$

b)Goniometrické rovnice obsahující více goniometrických funkcí

se musí zjednodušit pomocí vztahů mezi goniometrickými funkcemi tak , aby obsahovaly jen jednu funkci.

Příklad: $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$

nahradíme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2\sin^2 x - 1 + \sin^2 x - 4\sin x + 2 = 0$

$3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$

substituce: $\sin x = y$

$3y^2 - 4y + 1 = 0$

$D = 4$ $y_1 = 1$ $y_2 = \frac{1}{3}$

$\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{3}$

$x_1 = 90° + k.360°$

$x_2 = 19°28' + k.\ 360°$

$x_3 = 160°32' + k.\ 360°$

Příklad: $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

nahradíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

substituce: $\cos x = y$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2) (y + 1) = 0$

$y_1 = -1$ $\quad$ $y_2 = 2$

$\cos x = -1$ $\quad$ $x = 180° + k.360°$

c)Goniometrické rovnice řešené pomocí vzorců

Příklad: $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$

$\sin 3x + \sin x = \sin 2x$

Řešíme pomocí vzorce $\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

$$2.\sin\frac{3x+x}{2}.\cos\frac{3x-x}{2} = 2\sin x\cos x$$

$$2.\sin\frac{4x}{2}.\cos\frac{2x}{2} = 2\sin x\cos x$$

$\sin 2x.\cos x = \sin x\cos x$ $\quad$ / : cos x $\quad \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow$ $x_1 = 90° + k.180°$

$\sin 2x = \sin x$

$2 \cdot \sin x\cos x = \sin x$ $\quad$ / : sin x $\quad \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow$ $x_2 = 0° + k.180° = k.180°$

$2 \cdot \cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $x_3 = 60° + k.360°$ $\quad$ $x_4 = 300° + k.360°$

Cvičení:

Řešte goniometrickou rovnici:

1.) $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ [{210°+ k. 360°; 330° + k. 360° }]

2.) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ [{45°+ k. 360°; 135° + k. 360° }]

3.) $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ [{30°+ k. 180°}]

4.) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ $\quad$ [{45°+k.360°;135°+ k.360°;225°+ k.360°;315°+ k.360°}]

5.) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ $\quad$ [{45°+ k. 360°}]

6.) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\left[\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

7.) $2\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x$ $\left[\left\{k\pi\,;\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

8.) $\cot g^2 x = -\cot gx$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{3}{4}\pi + k\pi\right\}\right]$

9.) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$ [{30°+k.360°;150°+ k.360°;270°+ k.360°}]

10.) $2tgx - 3\cot gx = 1$ [{56°19′°+k.180°;135°+ k.180°}]

11.) $3tg^2 x + 4\sqrt{3}tgx + 3 = 0$ $\left[\left\{\dfrac{5}{6}\pi + k\pi\,;\dfrac{2}{3}\pi + k\pi\right\}\right]$

12.) $\sqrt{3}\cot g^2 x - 2\cot gx - \sqrt{3} = 0$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi\,;\dfrac{2}{3}\pi + k\pi\right\}\right]$

13.) $2 - 2\cos^2 x - \sqrt{3} = 0$ $\left[\left\{k\pi\,;\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

14.) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4\cot gx = 0$ $\left[\left\{\dfrac{2}{3}\pi + k\pi\,;\dfrac{5}{6}\pi + k\pi\right\}\right]$

15.) $\dfrac{tgx + 1}{tgx - 1} = 2 + \sqrt{3}$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi\,;k \in Z\right\}\right]$

16.) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\dfrac{5}{3}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

17.) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - 4tgx = 0$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right\}\right]$

18.) $2 + \cos 2x = -5\sin x$ $\left[\left\{\dfrac{7}{6}\pi\,;\dfrac{11}{6}\pi\right\}\right]$

19.) $tg^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3}{4}\pi\,;\dfrac{5}{4}\pi\,;\dfrac{7}{4}\pi\right\}\right]$

20.) $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}$ $\left[\left\{45^o + k.180^o\right\}\right]$

21.) $\sin^2 x - \sin x = 0$ $\left[\left\{k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right]$

22.) $2\cos^2 x = \sin^2 x - 1$ $\left[\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$

23.) $tgx + \cot gx = \dfrac{13}{6}$ $\left[33^o40';56^o20';213^o40';236^o20' + k.180^o\right]$

24.) $3tgx - 1 = 2tgx$ $\left[45^o + k.180^o\right]$

25.) $3\sin x + \sqrt{2} = -\sqrt{2}\sin x + 3$ $\left[21^o10' + k.360^o;158^o50' + k.360^o\right]$

26.) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$ $\left[\left\{k\pi\,;\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}\right]$

27.) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ $\left[\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{2\pi}{5} + (2k+1)\pi\right\}\right]$

28.) $\sin 2x + \cos 2x - tgx = 1$ $\left[\left\{k\pi\,;\dfrac{\pi}{8} + k\pi\,;\dfrac{5\pi}{8} + k\pi\right\}\right]$