Goniometrické funkce obecného úhlu

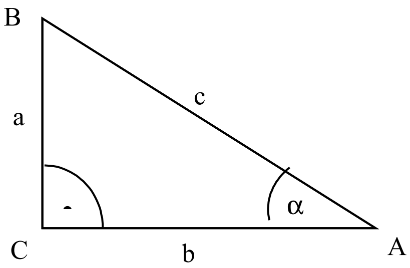
V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou definovány funkce sin , cos, tg , cotg libovolného úhlu takto:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ protilehlá odvěsna ku přeponě

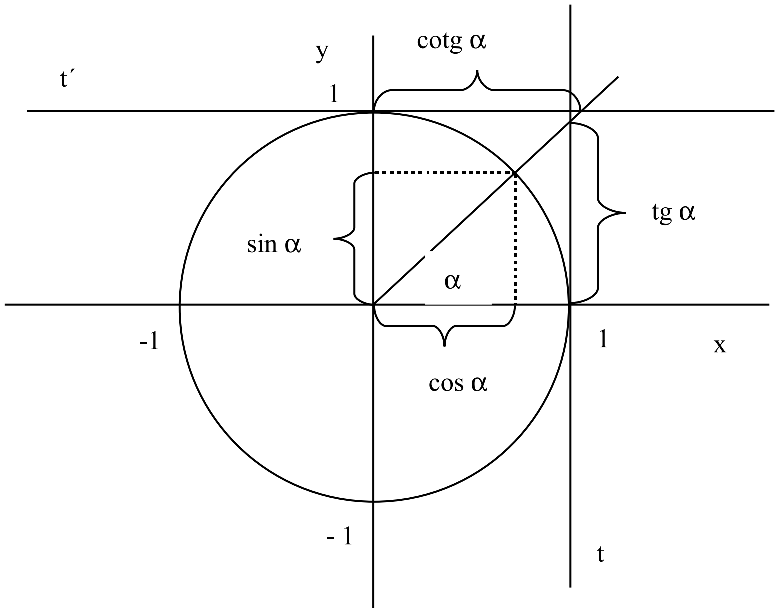
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ přilehlá odvěsna ku přeponě

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$ protilehlá odvěsna ku přilehlé odvěsně

$\mathrm{cotg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ přilehlá odvěsna ku protilehlé odvěsně



Na jednotkové kružnici můžeme jednotlivé goniometrické funkce zobrazit takto:

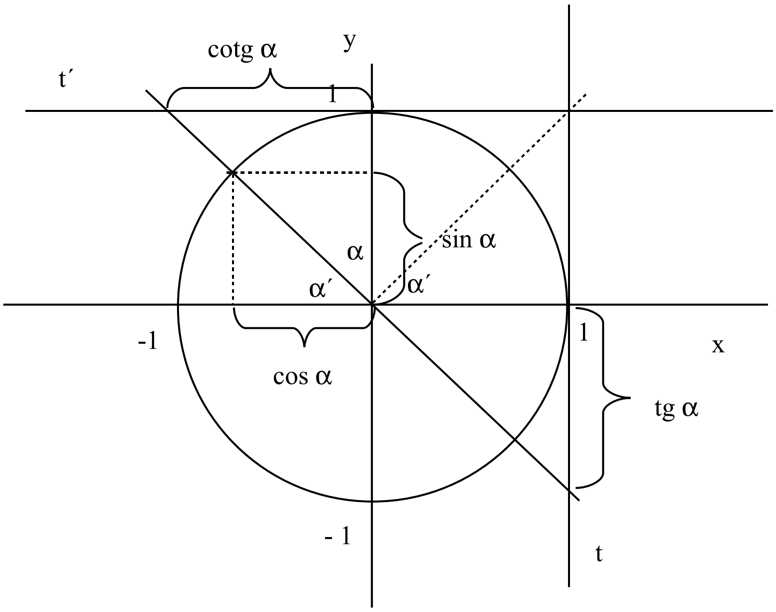


Zde je vidět např. , že **sin 0° = 0 , cos 0 °= 1 , tg 0°= 0 , cotg 0°** není definován , dále **sin 90°= 1 , cos 90°= 0 , tg 90°** není definován , **cotg 90°= 0**

Pokud chceme určovat hodnoty goniometrických funkcí úhlů větších než 90°, musíme vždy nejprve určit, v kterém kvadrantu leží koncové rameno úhlu a potom postupovat individuálně v každém kvadrantu.

Úhly druhého kvadrantu: (90° - 180°)

Při určení hodnot gon. funkcí musíme vyjít z obrázku **$\underline{\alpha = (180° - \alpha')}$**



sin α = sin (180° - α´)

cos α = - cos (180° - α´)

tg α = - tg (180° - α ´)

cotg α = - cotg (180° - α´)

<u>Příklad:</u>

sin 150° = sin (180° - 30°) = sin 30° = 0,5

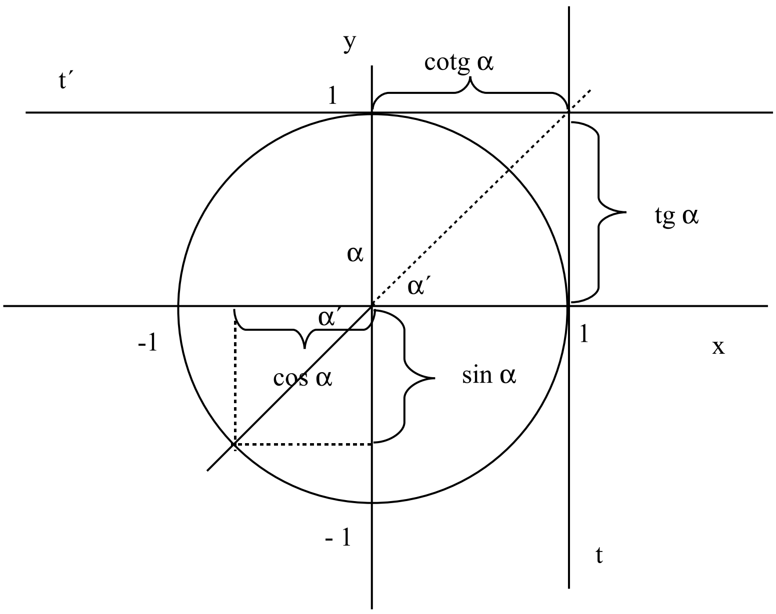
cos 135° = cos (180° - 45°) = - cos 45° = $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

tg 120° = tg (180° - 60°) = - tg 60° = $-\sqrt{3}$

cotg 150°= cotg (180° - 30°) = - cotg 30° = $-\sqrt{3}$

Úhly třetího kvadrantu: (180° - 270°)

Při určení hodnot gon. funkcí musíme vyjít z obrázku **$\underline{\alpha = (180° + \alpha')}$**



sin α = - sin (180° + α´)

cos α = - cos (180° + α´)

tg α = tg (180° + α´)

cotg α = cotg (180° + α´)

Příklad:

$\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

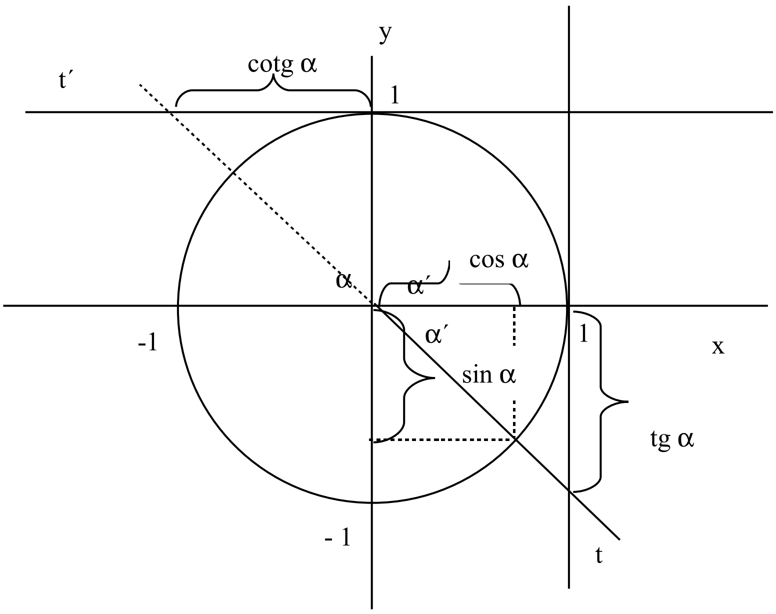
$\mathrm{tg}\, 240° = \mathrm{tg}(180° + 60°) = \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$

$\mathrm{cotg}\, 225° = \mathrm{cotg}(180° + 45°) = \mathrm{cotg}\, 45° = 1$

Úhly čtvrtého kvadrantu: (270° - 360°)

Při určení hodnot gon. funkcí musíme vyjít z obrázku

$\alpha = (360° - \alpha')$



$\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha')$

$\cos\alpha = \cos(360° - \alpha')$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}(360° - \alpha')$

$\mathrm{cotg}\,\alpha = -\mathrm{cotg}(360° - \alpha')$

Příklad:

$\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -0{,}5$

$\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 300° = \mathrm{tg}(360° - 60°) = -\mathrm{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$

$\mathrm{cotg}\, 315° = \mathrm{cotg}(360° - 45°) = -\mathrm{cotg}\, 45° = -1$

Z výše uvedených odvození lze dále udělat několik závěrů:

- perioda funkcí sin α a cos α je 360°
- perioda funkcí tg α a cotg α je 180°
- lze přesně určit znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

	I	II	III	IV
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-

Se znalostí určování hodnot goniometrických funkcí v těchto čtyřech kvadrantech vystačíme již pro všechny hodnoty úhlů. Stačí pouze odečíst periodu, umístit úhel do příslušného kvadrantu a vypočítat jeho hodnotu.

Příklad:

$\sin 510° = \sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 0{,}5$

$\cos 855° = \cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad:

Hodnota úhlu může být zadána v radiánech, pak pouze převedeme na stupně a vypočteme hodnotu podle známého postupu.

$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Příklad:

Hodnota úhlu může být zadána v radiánech a je větší než perioda dané funkce. Pak je výhodnější u funkcí sin a cos odečíst násobky periody 2π a potom teprve převést na stupně, u funkcí tg a cotg odečítáme násobky periody π.

$$\sin\frac{16\pi}{3} = \sin(5\tfrac{1}{3}\pi) = \sin(5\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \sin(\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \sin\frac{4\pi}{3} = \sin 240° = \sin(180° + 60°) =$$

$$= -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$