Komplexní čísla

Pojem komplexní číslo zavedeme při řešení rovnice: $x^2 + 1 = 0$

Řešení:
$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \sqrt{-1}$$

Odmocnina ze záporného čísla reálně neexistuje. Z toho důvodu se obor reálných čísel rozšíří o další číslo :

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$$

Všechny další odmocniny ze záporného čísla lze s pomocí i určit : $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1).9} = \sqrt{-1}.\sqrt{9} = i.3 = 3i$

Číslo **i** nazýváme **imaginární jednotka.** (imaginární = pomyslný)

Mocniny imaginární jednotky:

- $i = \sqrt{-1}$
- $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
- $i^3 = i^2 . i = -i$
- $i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 . i = 1 . i = i$
- $i^6 = i^4 . i^2 = -1$
-
-

První čtyři mocniny se dále opakují.

Můžeme podle tohoto klíče určit libovolnou mocninu imaginární jednotky.

<u>Příklad:</u>
Určete i^{27} , i^{154}

<u>Řešení:</u>
$i^{27} = i^{4.6+3} = i^3 = -i$
$i^{154} = i^{38.4+2} = i^2 = -1$

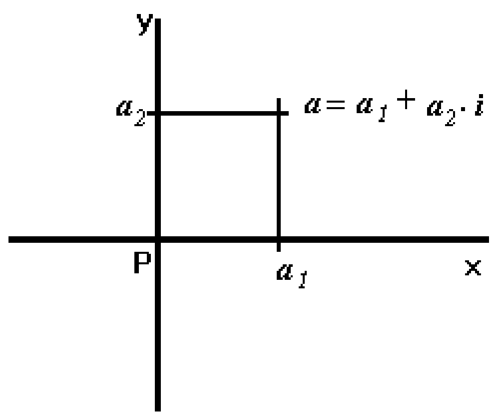
<u>Algebraický tvar komplexního čísla:</u>

je to číslo $\boldsymbol{a = a_1 + a_2.i}$ kde a_1 , a_2 jsou reálná čísla
a_1 nazýváme reálná část komplexního čísla
$\boldsymbol{a_2.i}$ nazýváme imaginární část komplexního čísla

<u>Zobrazení komplexních čísel:</u>

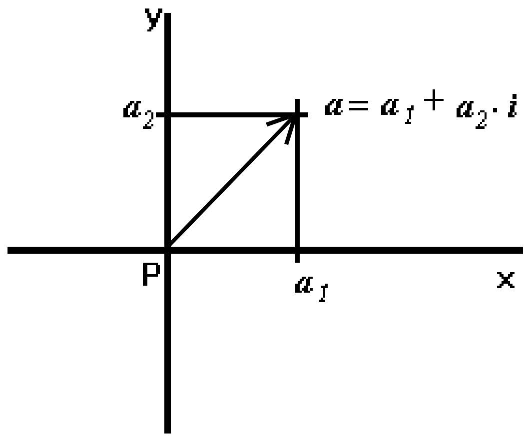
Reálná čísla zobrazujeme na číselnou osu. S číselnou osou bychom v oboru komplexních čísel nevystačili - komplexní čísla zobrazujeme do „ Gaussovy roviny komplexních čísel“.

osu x nazýváme reálná osa
osu y nazýváme imaginární osa



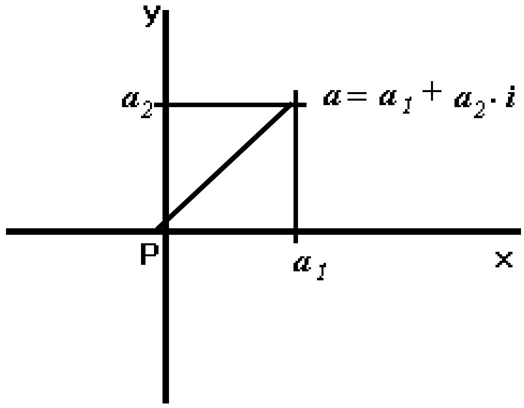
Komplexní čísla zobrazujeme jako body v rovině :
$a = [a_1, a_2]$

Někdy je výhodné zobrazovat komplexní čísla také jako vektory:



Absolutní hodnota komplexního čísla:

Absolutní hodnota reálného čísla je definována jako vzdálenost čísla od nuly (počátku) na číselné ose . Totéž platí v oboru komplexních čísel. Absolutní hodnota komplexního čísla se definuje jako jeho vzdálenost od počátku souřadného systému a je možno ji odvodit z obrázku:



$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Příklad:
Určete absolutní hodnotu komplexního čísla $b = 3 - 4i$
Řešení:
$$|b| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
Zobrazte toto komplexní číslo a změřte jeho vzdálenost od počátku souřadného systému.

Součet komplexních čísel:
Jsou-li dána dvě komplexní čísla $\boldsymbol{a = a_1 + a_2 . i}$, $\boldsymbol{b = b_1 + b_2 . i}$ pak jejich součtem je opět komplexní číslo c .
$c = (\boldsymbol{a_1 + b_1}) + (\boldsymbol{a_2 + b_2})\boldsymbol{i}$

Příklad.
Sečtěte tato komplexní čísla $a = 2 + 3\,i$, $b = 6 + 4\,i$
Řešení:
$a + b = (2 + 6) + (3 + 4)\,i = 8 + 7\,i$
Provedeme-li grafický součet vektorů a , b, zjistíme, že součet komplexních čísel má tentýž výsledek.

Rozdíl komplexních čísel:
Jsou-li dána dvě komplexní čísla $\boldsymbol{a = a_1 + a_2 . i}$, $\boldsymbol{b = b_1 + b_2 . i}$ pak jejich rozdílem je opět komplexní číslo c .
$c = (\boldsymbol{a_1 - b_1}) + (\boldsymbol{a_2 - b_2})\,\boldsymbol{i}$

Příklad.
Odečtěte $a - b$: $a = 2 + 3\,i$, $b = 6 + 4\,i$
Řešení:
$a - b = (2 - 6) + (3 - 4)\,i = -4 - i$
Graficky odečteme vektor b od vektoru a tak, že k vektoru a přičteme vektor (-b).

Součin komplexních čísel:

Jsou-li dána dvě komplexní čísla $\boldsymbol{a = a_1 + a_2.i}$, $\boldsymbol{b = b_1 + b_2.i}$ pak jejich součinem je opět komplexní číslo c .

c = $\boldsymbol{(a_1 + a_2.i) . (b_1 + b_2.i) = a_1 b_1 + a_2.i\, b_1 + a_1 b_2.i + a_2.i.\, b_2.i = a_1.b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1).i + a_2 b_2 i^2 =}$

$\boldsymbol{= (a_1.b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1).i}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{(i^2 = -1)}$

$$\boldsymbol{c = a . b = (a_1.b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1).i}$$

Příklad :

Určete součin $a . b$: $\quad a = 5 - 4i$

$\qquad\qquad\qquad\qquad b = 3 + 2i$

Řešení:

$a . b$ = (5.3+2.4) + (5.2-4.3)i = 23 - 2i

Čísla komplexně sdružená:

Číslo $a = a_1 + a_2 i$ a číslo $\overline{a} = a_1 - a_2 i$

Příklad:

K číslu a = 5 + 4 i určete číslo komplexně sdružené.

Řešení:

$a = 5 + 4i$, $\overline{a} = 5 - 4i$

Vlastnosti čísel komplexně sdružených:

1. Obrazy čísel komplexně sdružených jsou osově souměrné podle osy x
2. Součtem čísel komplexně sdružených je reálné číslo
3. Rozdílem čísel komplexně sdružených je číslo ryze imaginární
4. Součinem čísel komplexně sdružených je číslo reálné

Podíl komplexních čísel:

Podíl komplexních čísel a: b je komplexní číslo c , které musíme upravit tak , aby se dalo psát ve tvaru

$c = c_1 + c_2 i$

Komplexní číslo ve tvaru zlomku rozšíříme takovým zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel je číslo komplexně sdružené k jmenovateli původního zlomku.

$$c = \frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} . \frac{b_1 - b_2 i}{b_1 - b_2 i} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{b_1^2 + b_2^2}$$

Příklad:

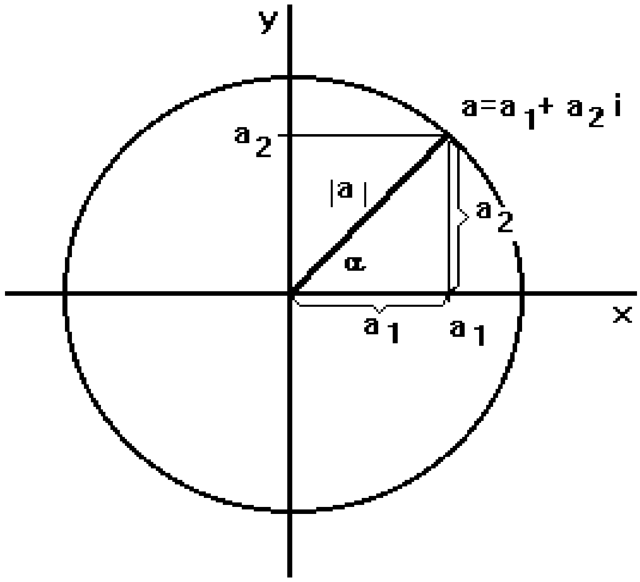
Vypočtěte podíl $\frac{5 + 2i}{2 - i}$

Řešení:

$$\frac{5 + 2i}{2 - i} . \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{10 + 4i + 5i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{8 + 9i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{9}{5} i$$

Goniometrický tvar komplexního čísla:
Komplexní číslo v goniometrickém tvaru je dáno svou absolutní hodnotou a úhlem průvodiče - viz obrázek

- $a = |a| . (\cos\alpha + i . \sin\alpha)$



Úhel α vypočteme z obrázku :

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|}$$

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{|a|}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Při výpočtu hodnot funkcí sin α a cos α musíme vzít v úvahu kvadrant, ve kterém se úhel nachází.

Příklad:
Komplexní číslo a = 1+ i převeďte do goniometrického tvaru.
Řešení:
Nejprve určíme absolutní hodnotu komplexního čísla

$$|a| = \sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{2}}$$

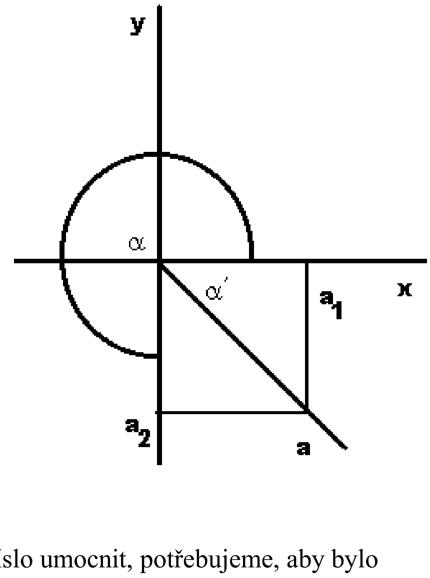
Dále určíme úhel α : $\sin\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

$\alpha = 45°$

Goniometrický tvar : $a = \sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos \mathbf{45}° + i \cdot \sin \mathbf{45}°\right)$

Příklad:
Komplexní číslo a = 1- i převeďte do goniometrického tvaru.
Řešení:
Nejprve určíme absolutní hodnotu komplexního čísla

$$|a| = \sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{2}}$$



Obraz komplexního čísla *a* leží ve čtvrtém kvadrantu. K výpočtu velikosti úhlu α použijeme pomocný úhel α′.

$$\sin\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha' = 45°$
$\alpha = 135°$

$$a = \sqrt{2}\left(\cos 135° + i \cdot \sin 135°\right)$$

Moivreova věta
Slouží k výpočtu mocniny komplexního čísla. Abychom mohli komplexní číslo umocnit, potřebujeme, aby bylo dáno v goniometrickém tvaru. Platí tato věta:

$$(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^n = \cos n \cdot \alpha + i \cdot \sin n \cdot \alpha$$

Příklad:
Umocněte komplexní číslo a = 4(cos 25°+ i . sin 25°) , a^5 = ?

Řešení:
$a^5 = 4^5$ (cos 4.25°+ i . sin 4.25°)
a^5 = 1024 (cos 100° + i . sin 100°)

Příklad:
Umocněte $\left(\sqrt{2} + 2i\right)^3$

Řešení:
Úhel leží v prvním kvadrantu $|a| = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\alpha = 54°44'$

$$a = \sqrt{6}\left(\cos 54^\circ 44' + i.\sin 54^\circ 44'\right)$$
$$a^3 = 6\sqrt{6}\left(\cos 3\cdot 54^\circ 44' + i.\sin 3\cdot 54^\circ 44'\right)$$
$$a^3 = 6\sqrt{6}\left(\cos 163^\circ 32' + i.\sin 163^\circ 32'\right)$$

Cvičení:

1. Zjednodušte výraz: $\frac{7-3i}{3-7i} - \frac{7+3i}{3+7i}$
2. Zjednodušte výraz: $\frac{3i-5}{i+1} - i + 2$
3. Zjednodušte výraz: $\frac{4+i}{4-i} - \frac{4-i}{4+i}$

[$\frac{16}{17}i$]

4. Pro které komplexní číslo platí, že jeho součin s číslem (2 + 5i) je roven součinu čísla komplexně sdruženého k hledanému číslu s číslem (-1 – 3i) ?
5. Určete hodnotu čísla: $A = i - i^3 + i^5 - i^7 + i^9 - i^{11}$

[6i]

6. Určete hodnotu čísla: $B = 2 - 3i + 7i^2 - 8i^3 + 9i^4 - 10i^5$

[4-5i]

7. Vypočtěte: $(2 + i + 3i^2 - i^3 - i^4 + 5i^5). (i - i^2 + 3i^3 - 5i^4)$

[22- 24i]

8. Najděte číslo komplexně sdružené s číslem: $2i - 3i (1 + 2i)^2 - 4(2 - 4i)$

[4 + 27i]

9. Najděte číslo komplexně sdružené s číslem: $(1 - i) (2 + 3i) - 2 (1 + i)(1 - i) + 3(2 - 3i)^2$

[-14 - 35i]

10. Najděte číslo komplexně sdružené s číslem: $(2 - i) (2 + i) + (3 + 2i)^2 + (3 - 2i)^2 + 2(4 - i)(4 + i)$

[49]

11. Dělte komplexní čísla:

a) $\frac{1+i}{1+2i}$ b) $\frac{5+i\sqrt{5}}{5-i\sqrt{5}}$ c) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

d) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$

[a) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$, b) $\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{5}}{3}$, c) 0 , d) 1 - i]

12. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexních čísel:

a) 1 + i b) 2- 3i c) 3 + 4i

d) $\frac{2+i}{3}$ e) $1+i\sqrt{3}$ f) $1-i\sqrt{3}$

[a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{13}$, c) 5 , d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, e) 2, f) 2]

13. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexních čísel:

a) (3 + 4i)2 – i b) (3 + i $\sqrt{2}$) (3 – i $\sqrt{2}$)

c) (1 + i $\sqrt{2}$) (2 – 3i) (3 + i) d) (1 – 2i) (3 + i)

[a) $\sqrt{85}$, b) 11, c) $\sqrt{390}$ d) $\sqrt{50}$]

14. Komplexní čísla vyjádřete v goniometrickém tvaru:

a) z = -5i b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) z = -3 d) $z = -1+\sqrt{3}\,i$

e) $z = \frac{1+i}{1-i}$

[a) z = 5(cos270°+ i sin270°) , b) z = cos 315°+ i sin 315°, c) z = 3. (cos 180°+ i sin 180°), d) z = 2(cos 120°+ i sin 120°), e) z = cos 90°+ i sin 90°]

15. V goniometrickém tvaru vyjádřete číslo

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i}$$

[z = cos 270°+ i sin 270°]

16. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte: $(1 – i)^8$.

[16]

17. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte: $(1 + i)^4$.

[-4]

18. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte: $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{14}$

[$2^{13}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$]

19. Vypočtěte kořeny rovnice

a) $x^2 + 5 = 0$ b) $2x^2 + 7 = 0$ c) $3x^2 + 4 = 0$

[a) $x_{1,2} = \pm i\sqrt{5}$, b) $x_{1,2} = \pm i\sqrt{3,5}$, c) $x_{1,2} = \pm i\frac{2\sqrt{3}}{3}$]

20. Vypočtěte kořeny rovnice

$5x^2 – 4x + 1 = 0$

[$x_{1,2} = \frac{2}{5} \pm \frac{1}{5}i$]