Kvadratické nerovnice

Je to výroková forma v jednom z těchto tvarů:

$$ax^2 + bx + c \succ 0$$
$$ax^2 + bx + c \prec 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ , kde } a, b, c \in \mathrm{R}\text{ , } a \neq 0$$

Dovolené úpravy:

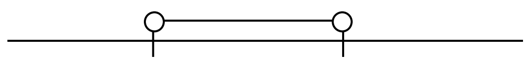
- nahrazení libovolné strany nerovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru nerovnice
- přičtení výrazu k oběma stranám nerovnice
- násobení obou stran nerovnice kladným výrazem
- násobení obou stran nerovnice záporným výrazem spolu s otočením znaménka nerovnosti
- umocnění obou stran nerovnice stejnou mocninou. Obě strany nerovnice musí nabývat pouze nezáporných hodnot.
- odmocnění obou stran nerovnice stejným odmocněncem. Obě strany nerovnice musí nabývat pouze nezáporných hodnot.

1.) Ryze kvadratická nerovnice

Je to nerovnice tvaru $x^2 - m \prec 0$ nebo $x^2 - m \succ 0$ nebo $x^2 + m \succ 0$ nebo $x^2 + m \prec 0$

Příklad:

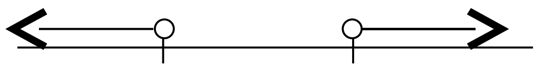
$x^2 - 9 \prec 0$ platí: $|x| \prec 3$



$x \in (-3,3)$

Příklad:

$x^2 - 9 \succ 0$ platí: $|x| \succ 3$



$x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Příklad:

$x^2 + 9 \succ 0$ platí: $|x| \succ \sqrt{-9}$

Nemá řešení v R.

Příklad:

$(x-5)^2 \prec 1$ platí: $|x-5| \prec 1$

$x \in (4,6)$

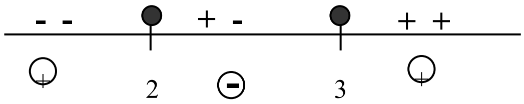
2.) Úplná kvadratická nerovnice

Úplnou KN se snažíme nejprve rozložit:

Příklad:

Nerovnici $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ rozložíme na tvar $(x-2)(x-3) \leq 0$

Zobrazíme na číselnou osu nulové body závorek:



$x \in \langle 2,3 \rangle$

<u>Příklad:</u>

Nerovnici $4x^2 + 16x + 5 \geq 0$ rozložíme pomocí diskriminantu:

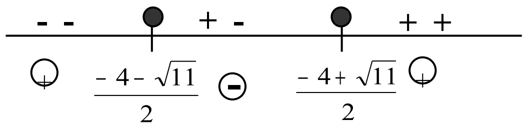
$$D = 256 - 80 = 176$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 4\sqrt{11}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\left(x - \frac{-4 - \sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{-4 + \sqrt{11}}{2}\right) \geq 0$$

Zobrazíme na číselnou osu nulové body závorek:



$$x \in \left(-\infty, \frac{-4 - \sqrt{11}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-4 + \sqrt{11}}{2}, \infty\right)$$

Nelze-li KN rozložit, má buď řešení R , nebo ∅.

To poznáme tak, že zvolíme libovolné číslo, které do nerovnice dosadíme, je-li nerovnost splněna, je řešením R, není-li splněna, je řešením ∅.

<u>Příklad:</u>

$$x^2 - 2x + 7 \geq 0$$

Protože trojčlen nelze rozložit, vypočteme D:

$$D = 4 - 28 = -22$$

Diskriminant je záporný - nerovnici nelze rozložit.

Dosadíme libovolné číslo: x = 5

$$25 - 10 + 7 \geq 0$$

$$22 \geq 0$$

Tato nerovnost je pravdivá, x = R.

Při řešení kvadratických nerovnic je možno využít graf kvadratické funkce.

<u>Cvičení:</u>

1.) $x^2 + x - 2 \leq 0$

[$\langle -2;1 \rangle$]

2.) $x^2 - 6x - 7 \prec 0$

[$(-1,7)$]

3.) $x^2 - 4x \succ 0$

[$(-\infty,0) \cup (4,\infty)$]

4.) $x^2 - 4x + 4 \prec 0$

[2]

5.) $x^2 - 2x + 9 \prec 0$

[R]

6.) $-x^2 + x - 3 \prec 0$

[ϕ]

7.) $3x^2 - 7x + 4 \prec 0$

[$\left\langle 1; \frac{1}{4} \right\rangle$]

8.) $3x^2 - 7x + 6 \prec 0$

[ϕ]

9.) $-4(3-x)^2 \geq 11x - 33$

[$\left\langle \frac{1}{4}; 3 \right\rangle$]

10.) $-x^2 + 5x + 36 \prec 0$

[$(-\infty; -4\rangle \cup \langle 9; \infty)$]

11.) $10x^2 - 17x + 3 \prec 0$

[$\left(-\infty; \frac{1}{5}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$]

12.) $\dfrac{3x-7}{x^2 - 2x - 3} - 1 \prec 0$

[$(-\infty, -1) \cup (1,3) \cup (4, \infty)$]

13.) $x^2 - \frac{5}{6}x \leq \frac{7}{2}$

[$\left\langle -\frac{3}{2}; \frac{7}{3} \right\rangle$]

14.) $(2x-1)(x-10) \geq x(x-3) - 62$

[$(-\infty; 6\rangle \cup \langle 12; \infty)$]