Kvadratické rovnice

Jsou to rovnice, které dovolenými úpravami lze převést na tvar

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0} \qquad \text{kde } a \neq 0$$

$a\,x^2$ - člen kvadratický
$b\,x$ - člen lineární
c - člen absolutní

1.) Rovnice ryze kvadratická

- je to rovnice, ve které chybí lineární člen

$$\mathbf{a\,x^2 + c = 0}$$

Tato rovnice má buď dva kořeny: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ nebo nemá reálné kořeny

Tato rovnice - má 2 kořeny pouze pro $-\frac{c}{a} \succ 0$

- má 1 kořen pro $-\frac{c}{a} = 0$

- nemá žádný reálný člen pro $-\frac{c}{a} \prec 0$

Příklad: Řešte rovnici $3x^2 - 75 = 0$

Řešení: $3x^2 - 75 = 0 \quad /:3$

$x^2 - 25 = 0$

rozložíme podle vzorce: $(x - 5).(x + 5) = 0$

$x_1 = 5\ ;\ x_2 = -5$

Zkouška: x_1: $L = 3\ .\ 5^2 - 75 = 3\ .\ 25 - 75 = 75 - 75 = 0$

$P = 0 \qquad \underline{L = P}$

x_2: $L = 3.\ (-5) - 75 = 3\ .\ 25 - 75 = 75 - 75 = 0$

$P = 0 \qquad \underline{L = P}$

Příklad: Řešte rovnici $4x^2 + 16 = 0$

Řešení: $4x^2 + 16 = 0$ nejde rozložit podle vzorce

$4x^2 = -16 \quad /:4$

$x^2 = -4$

$x_1 = \sqrt{-4} \qquad x_2 = -\sqrt{-4}$

Rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení.

Příklad: Řešte rovnici $(x+1)(x+3) = 4(x+2)$

Řešení: Nejprve roznásobíme závorky: $x^2 + x + 3x + 3 = 4x + 8$

$$x^2 + 4x + 3 = 4x + 8 \quad /-4x$$
$$x^2 + 3 = 8 \quad /-8$$
$$x^2 - 5 = 0$$

Dostali jsme ryze kvadratickou rovnici, rozložíme: $(x + \sqrt{5}).(x - \sqrt{5}) = 0$

$$x_1 = \sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{5}$$

Zkouška: $x_1 = \sqrt{5}$: $L = (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 3) = 5 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3 = 8 + 4\sqrt{5}$

$P = 4(\sqrt{5} + 2) = 4\sqrt{5} + 8$

$L = P$

$x_2 = -\sqrt{5}$: $L = (-\sqrt{5} + 1)(-\sqrt{5} + 3) = 5 - \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 3 = 8 - 4\sqrt{5}$

$P = 4(-\sqrt{5} + 2) = -4\sqrt{5} + 8 = 8 - 4\sqrt{5}$

$L = P$

Cvičení :

1.) $(3 - 2y)^2 = (y - 6)^2$ [$\pm$ 3]

2.) $\dfrac{5}{13 - x} - \dfrac{13}{5} = \dfrac{x}{5}$ [$\pm$ 12]

3.) $\dfrac{x + 2}{x + 8} = \dfrac{x - 2}{8 - x}$ [$\pm$ 4]

4.) $\dfrac{-4}{1 - 4x} - \dfrac{4}{1 + 4x} = 1$ [$\pm \frac{3}{4}$]

5.) $\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{x + 12} = \dfrac{1}{x}$ [$\pm$ 6]

2. Rovnice bez absolutního členu

Tento typ rovnice řešíme vždy vytýkáním :

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$$

vytkneme x: $x . (ax + b) = 0$

Odtud dostáváme 2 řešení $x_1 = 0$ $\quad ax_2 + b = 0$ $\quad x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Příklad : Řešte rovnici $2x^2 - 3x = 0$

Řešení : vytkneme x : $x . (2x - 3) = 0$

odtud : $x_1 = 0$ $\quad 2x - 3 = 0$

$$2x = 3$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

Rovnice má dva kořeny : $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$

Zkouška : x_1 : $L = 2 . 0 - 3 . 0 = 0 - 0 = 0 \quad P = 0 \quad L = 0$

x_2 : $L = 2 . \dfrac{9}{4} - 3 . \dfrac{3}{2} = \dfrac{18}{4} - \dfrac{9}{2} = \dfrac{18 - 18}{4} = 0 \quad P = 0 \quad L = 0$

Cvičení :

Řešte rovnice :

1.) $(x-1).(x-9) = (2x-3)^2$ $\quad [0 , \frac{2}{3}]$

2.) $\dfrac{2y+1}{3-y} = \dfrac{1-y}{y+3}$ $\quad$ [0 , -11]

3 .) $\dfrac{x+2}{x} = x + \dfrac{2}{x} - 1$ $\quad$ [2]

4.) $3 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{9}{3x - x^2} = 0$ $\quad$ [2]

5.) $3x^2 + 27x = 0$ $\quad$ [0, -9]

3) Úplná kvadratická rovnice

Kořeny kvadratické rovnice upravené na tvar $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ vypočteme pomocí 2 vzorců :

diskriminant $\quad D = b^2 - 4 . a . c$

vzorce pro výpočet kořenů $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

diskriminant rozhoduje o počtu kořenů rovnice:
a) D > 0 .... 2 různé reálné kořeny
b) D = 0 ....1 kořen
c) D < 0 ....0 kořenů v oborů reálných čísel

Příklad: Řešte rovnici $x^2 - x - 2 = 0$

Řešení : $D = b^2 - 4ac \qquad a = 1 \quad b = -1 \quad c = -2$

$$D = (-1)^2 - 4 . 1 . (-2) = 1 + 8 = 9 \qquad \sqrt{D} = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \qquad x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

Zkouška: x_1 : $L = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ $P = 0$ $L = P$

x_2: $L = (-1)^2 - (-1) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ $P = 0$ $L = P$

<u>Příklad :</u>

Řešte rovnici $\dfrac{x-1}{x+3} - \dfrac{x-3}{x+1} = 2$

<u>Řešení :</u> Rovnici musíme nejprve upravit na základní tvar. Protože neznámá se vyskytuje ve jmenovateli, musíme doplnit řešení o podmínky : $x + 3 \neq 0$, $x \neq -3$

$x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1} = 2 \qquad /.\ (x + 3)\ (x + 1)$$

$$(x - 1)(x + 1) - (x - 3)(x + 3) = 2 (x + 3)(x + 1)$$
$$X^2 - 1 \quad - \quad (x^2 - 9) = 2 (x^2 + 3x + x + 3)$$
$$^{x22} - 1 \quad - \quad x^2 + 9 = 2x^2 + 8x + 6$$
$$8 = 2x^2 + 8x + 6 \qquad / :2$$
$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

Rovnice je nyní v základním tvaru: $a = 1$; $b = 4$; $c = -1$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 16 - 4 . 1 (-1) = 16 + 4 = 20$

$\sqrt{D} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Kořeny ponecháme ve tvaru s odmocninou:

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2(-2 + \sqrt{5})}{2}$ $x_2 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2\left(-2 - \sqrt{5}\right)}{2}$

$x_1 = -2 + \sqrt{5}$ $x_2 = -2 - \sqrt{5}$

Zkoušku provedeme pouze pro jeden kořen, pro druhý je obdobná:

$x_1 = -2 + \sqrt{5}$ $\quad L = \dfrac{-2 + \sqrt{5} - 1}{-2 + \sqrt{5} + 3} - \dfrac{-2 + \sqrt{5} - 3}{-2 + \sqrt{5} + 1} = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \dfrac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{5} - 3\right)\left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(5 - \sqrt{5}\right)\left(1 + \sqrt{5}\right)}{\left(1 + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)} = \frac{5 - 3\sqrt{5} - \sqrt{5} + 3 + 5 - \sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{5 - 1} =$$

$= \dfrac{8}{4} = 2$ $\quad P = 2$ $\quad L = P$

<u>Příklad</u>:

Řešte kvadratickou rovnici : $2 + \dfrac{3(2x - 5)}{x + 4} + \dfrac{2}{3x - 1} = 0$

Řešení: Rovnici násobíme jmenovateli: $(x+4)\ (3x-1)$

Dostaneme $2(x+4)(3x-1) + 3(2x-5)(3x-1) + 2(x+4) = 0$

Roznásobíme $2(3x^2+11x-4) + 3(6x^2-17x+5) + 2x + 8 = 0$

$6x^2+22x - 8 + 18x^2 - 51x +15+2x + 8 = 0$

$24x^2-27x + 15 = 0\ \ /:3$

$8x^2 - 9x + 5 = 0$

$D = b^2-4ac$

$D = 81 - 4.8.5 = 81 - 160 = -79$ $D < 0$ rovnice nemá reálný kořen

Podmínky : $x \neq -4$ $x \neq \frac{1}{3}$

Cvičení

Řešte rovnice

1. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x^2}{9} - 3$ $\left[-\frac{9}{4}, 12\right]$
2. $(2x+3)^2 - x = 2x^2 - 27$ $[-6]$
3. $\frac{x^2+1}{2x} - \frac{29}{20} = 0$ $\left[\frac{5}{2}, \frac{2}{5}\right]$
4. $\frac{x}{63} - \frac{2}{7} = \frac{1}{x}\left(\frac{7}{9} - \frac{9}{7}\right)$ $[16, 2]$
5. $\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)(x-1) = (x-2)x$ $\left[\frac{8}{3}, \frac{2}{5}\right]$
6. $\frac{2x}{7x-2} + \frac{3}{6-3x} = \frac{5}{4}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
7. $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = 1$ $\left[5 \pm \sqrt{7}\right]$
8. $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ $\left[2, \frac{1}{2}\right]$
9. $\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{x+3}$ [-9 , 1]
10. $3x^2 - \frac{1}{8}x + 7 = 0$ [nemá řešení v R]
11. $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$ [0 , 3]
12. $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-4}{x+1}$ [-11 , 1]
13. $\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{(x-1).(x+2)}$ [-3]
14. $(x-2)^3 = (x+1)^3 + 9.(x-5)$ [-2 , 2]
15. $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$ $\left[-\frac{5}{6}, 5\right]$
16. $\frac{x(x-7)}{3} - 1 = \frac{11x}{10} - \frac{x-4}{3}$ $[-0{,}7; 10]$
17. $\frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{3x}{1-x} = 3 + \frac{17}{x^2-1}$ [3]

18. $\frac{3x+2}{x+4} = 1 + \frac{x-1}{x+3}$ [1 , -2]

19. $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-4} - \frac{3}{8}$ [6 , -4]

20. $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3}$ $[\pm 6]$

21. $\frac{5-3x}{3-5x} + \frac{3-5x}{5-3x} = \frac{5}{2}$ $[7; \frac{1}{7}]$

22. $\frac{2x}{x+6} = \frac{x}{6-x} + \frac{36}{4x^2-144}$ $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$

23. $\frac{5}{3-2y} + \frac{4}{y-2} = \frac{5}{y+1}$ $[\frac{8}{7}; 4]$

24. $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{3x+3}{2x-3} = \frac{x-4}{2x^2-5x+3}$ $[4]$

25. $3\frac{x+1}{x+5} - \frac{3x+15}{x^2+2x-15} + \frac{x-12}{x-3} = 0$ [7 , -3]

26. $(2x+3)\cdot(3x-4)+(4x-5)\cdot(5x+6) = 10$ (ryze) [$\pm\sqrt{2}$]

27. $(x-2)^2 + (x-9)^2 = (x-11)^2$ (ryze) [6 , - 6]

28. $\frac{x+2}{x} = x + \frac{2}{x} - 1$ (bez abs. členu) [0 nevyh. , 2]

29. $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-5}{x+5} = 2\frac{2}{3}$ [10, -14]

30. $(2x-7)^2 - (3x+2)^2 = 125$ [-4]

31. $\frac{x-3}{x} + \frac{27}{x(x+3)} = \frac{x^2}{x^2+3x} - \frac{x-9}{x+3}$ [6 , 3]

32. $\frac{x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{5x^2-8}{x^2-1}$ [-2 , 4]

33. $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-1}{x-5} = 4$ [4 , 9]

34. $\frac{2x+5}{x} - \frac{14}{x-4} = 3$ [NŘ]

35. $\frac{3}{3+x} + \frac{3-x}{x} = \frac{11}{10}$ [2 , $-\frac{15}{7}$]

36. $\frac{\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}-2} = \frac{4}{\mathrm{x}(\mathrm{x}-2)}$ [NŘ]

37. $(2x-7)^2 - (3x+2)^2 = 125$ [- 4]