Lineární nerovnice

= zápis tvaru $l\,(x) \prec p\,(x)$ nebo

$l\,(x) \succ p\,(x)$

$l\,(x) \le p\,(x)$

$l\,(x) \ge p\,(x)$

kde l (x) je levá strana nerovnice a p (x) je pravá strana nerovnice

např. $x + 5 \succ 4$

Při úpravách nerovnice můžeme postupovat těmito způsoby:

1) k oběma stranám přičteme totéž číslo nebo výraz
2) od obou stran odečteme totéž číslo nebo výraz
3) převedeme člen z jedné strany na druhou s opačným znaménkem
4) násobíme (nebo dělíme) obě strany nerovnice kladným číslem
5) násobíme (nebo dělíme) obě strany nerovnice záporným číslem a zároveň otočíme znaménko nerovnosti

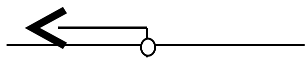
<u>Příklad:</u>

Řešte nerovnost $3x - 5 \prec x + 2$

<u>Řešení:</u>

na jednu stranu nerovnice (levou) převádíme členy s x, na druhou stranu ostatní:

$$3x - x \prec 2 + 5$$
$$2x \prec 7 \;/ : 2$$
$$x \prec \frac{7}{2}$$



$\frac{7}{2}$

Výslednou nerovnost můžeme zobrazit:

$$P_x = \left(-\infty, \tfrac{7}{2}\right)$$

<u>Příklad:</u>

Řešte nerovnici $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \succ \frac{1}{6} + x$

<u>Řešení:</u>

Celou rovnici násobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů číslem 6 :

$$2x - 3 \succ 1 + 6x$$

Členy s x převedeme na levou stranu rovnice, ostatní na pravou:

$$2x - 6x \succ 1 + 3$$
$$-4x \succ 4 \;/ : (-4) \quad \text{(otočit znaménko nerovnosti)}$$
$$x \prec -1 \qquad P_x = (-\infty, -1)$$

Cvičení:

Řešte nerovnice:

1.) $\frac{2y+6}{2} \prec \frac{3y-1}{3}$ [nemá řešení]

2.) $\frac{5x+1}{2} \succ \frac{10x-5}{3} - \frac{5x-1}{6}$ [nerovnost splněna pro každé x]

3.) $(3x-5)^2 + (4x-3)^2 \ge (5x-4)^2$ [$\left(-\infty, \tfrac{9}{7}\right\rangle$]

4.) $2(x-3) \prec x - 1$ [$(-\infty, 5)$]

5.) $\frac{4x}{3} \leq \frac{2}{3} + x$ [$\left(-\infty, 2\right\rangle$]

6.) $2 - \frac{x+2}{3} \succ x - \frac{x+3}{3}$ [$\left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$]

7.) $6x + 1 \succ 2(x-5) - 1$ [$\left(-2, \infty\right)$]

8.) $4x - 3 \prec 5 - 2x$ [$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$]

9.) $\frac{2x-3}{12} + \frac{3-x}{16} \prec 0$ [$\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$]

10.) $y - \frac{5y-3}{8} \succ \frac{3y+5}{8}$ [nemá řešení]

Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

Např: $\frac{4-x}{2x-3} \succ 0$

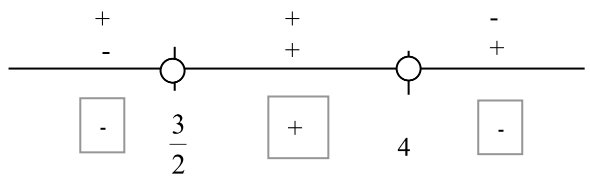
Tyto nerovnice nemůžeme pouze násobit jmenovatelem, protože nemůžeme jednoznačně určit, zda je kladný nebo záporný.

Nejvýhodnější je postupovat podle následujícího příkladu :
Příklad:

$$\frac{4-x}{2x-3} \succ 0$$

Řešení:
Zajímá nás, kdy je tento zlomek záporný ($\prec 0$). Určíme nulové body čitatele a jmenovatele a zobrazíme na číselnou osu:

Určíme , jaká znaménka má čitatel a jmenovatel v takto vzniklých intervalech:



- podíl dvou kladných nebo dvou záporných čísel je číslo kladné
- podíl kladného a záporného čísla je číslo záporné

Oba nulové body do řešení nepatří, ve jmenovateli nesmí být nula, rovnost nule nepřipouštíme.

Hledali jsme, kdy je daný zlomek kladný – tedy v intervalu $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. $P_x = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

Příklad:

Řešte nerovnici: $\frac{x+3}{x-2} \prec -2$

Řešení: Rovnici upravíme tak , aby na pravé straně byla 0:

$$\frac{x+3}{x-2}+2 \prec 0$$

Levou stranu upravíme tak , aby obsahovala jediný zlomek
(dáme na společného jmenovatele):

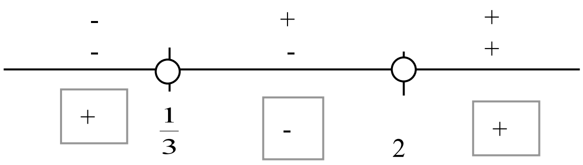
$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{2(x-2)}{(x-2)} \prec 0$$

$$\frac{x+3+2x-4}{x-2} \prec 0$$

$$\frac{3x-1}{x-2} \prec 0$$

Zajímá nás, kdy je tento zlomek záporný ($\prec 0$). Určíme nulové body čitatele a jmenovatele a zobrazíme na číselnou osu:

Určíme , jaká znaménka má čitatel a jmenovatel v takto vzniklých intervalech:



- podíl dvou kladných nebo dvou záporných čísel je číslo kladné
- podíl kladného a záporného čísla je číslo záporné

My jsme hledali, kdy je daný zlomek záporný - tedy v intervalu **-** : $\left(\frac{1}{3},2\right)$

$$P_x = \left(\frac{1}{3},2\right)$$

Příklad :

Řešte rovnici : $\frac{3x-1}{x+4} \geq 2$

Řešení :

Převedeme číslo 2 na levou stranu rovnice :

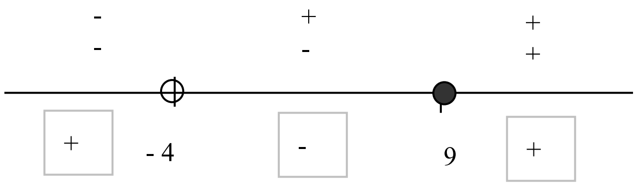
$$\frac{3x-1}{x+4}-2 \geq 0$$

Dáme na společného jmenovatele : $\frac{3x-1}{x+4}-\frac{2\left(x+4\right)}{\left(x+4\right)} \geq 0$

$$\frac{3x-1-2x-8}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{x-9}{x+4} \geq 0$$

Určíme nulové body čitatele a jmenovatele a znaménka v jednotlivých intervalech :



Tentokrát jsme hledali, kdy je zlomek ≥ 0 - tedy kladný nebo 0. Zbývá určit , zda do řešení patří i nulové body:

č. (-4) nemůže být řešením → nesmí být ve jmenovateli 0

č. 9 může být řešením, celý zlomek by měl hodnotu 0 a rovnost nule připouštíme

$P_x = (-\infty, -4) \cup \langle 9, \infty)$

Cvičení :

Řešte nerovnice :

11.) $\dfrac{4-2x}{1+3x} < 0$ $\left[\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)\right]$

12.) $\dfrac{3y+7}{2-6y} < 0$ $\left[\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (2, \infty)\right]$

13.) $\dfrac{5-2x}{8+5x} < 1$ $\left[\left(-\infty, -\frac{8}{5}\right) \cup \left(-\frac{7}{3}, \infty\right)\right]$

14.) $\dfrac{9-2x}{4x+1} > 2$ $\left[\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{10}\right)\right]$

15.) $\dfrac{2x-1}{3-x} \leq 2$ $\left[\left(-\infty, \frac{7}{4}\right\rangle \cup (3, \infty)\right]$

16.) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+3x+2} \leq 0$

17.) $\dfrac{x^2+3x-40}{x^2-4} \geq 0$

18.) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x-7} \succ 0$

19.) $\dfrac{2x^2-2x-12}{x^2+6x+5} \geq 0$ $[(-\infty, -5) \cup \langle -2, -1) \cup \langle 3, \infty)]$

20.) $\dfrac{-x+2}{2x-3} \prec -1$ $\left[\left(1, \frac{3}{2}\right)\right]$