Logaritmus

Definice:

Logaritmus kladného čísla x při základu a je číslo y, kterým daný základ a musíme umocnit, abychom dostali číslo x.

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \qquad \text{musí být} \quad x > 0 \;,\; a > 0$$

Příklad :

1.) $\log_5 25 = 2$ protože $5^2 = 25$

2.) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ protože $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

3.) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ protože $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Platí : ! $\log_a 1 = 0$!

Cvičení:

1.) Určete:

a) $\log_3 27$	d) $\log_8 64$	g) $\log_a a$
b) $\log_4 64$	e) $\log_{\frac{1}{3}} 1$	h) $\log_a \sqrt{a}$
c) $\log_2 64$	f) $\log_{\frac{1}{2}} 2$	

2.)Určete základy logaritmů:

a) $\log_x 625 = 2$	c) $\log_x 16 = -2$	e) $\log_x 16 = \frac{1}{2}$
b) $\log_x 625 = 4$	d) $\log_x 16 = -4$	f) $\log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Pravidla pro počítání s logaritmy

- **1.) $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$**

Logaritmus součinu se rovná součtu logaritmů jednotlivých činitelů

Příklad:

a) $\log_a 2 = \log_a 2 + \log_a$

b) $\log_a x^3 y = \log_a x^3 + \log_a x^3 + \log_a y$

- **2.) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$**

Logaritmus podílu se rovná logaritmus dělence minus logaritmus dělitele.

Příklad :

a) $\log_a \frac{x^2}{2y} = \log_a x^2 - \log_a 2y$

b) $\log_a \frac{100}{2} = \log_a 100 - \log_a 2$

- **3.) $\log_a x^n = n.\log_a x$**

Mocninu logaritmujeme, když exponent násobíme logaritmem základu mocniny.

Příklad:

a) $\log_a 10^2 = 2.\log_a 10$

b) $\log_a x^3 = 3.\log_a x$

- **4.) $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$**

Odmocninu logaritmujeme, když logaritmus odmocněnce dělíme odmocnitelem.

Příklad:

a) $\log_a \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3} .\log_a 10$

b) $\log_a \sqrt[7]{a} = \frac{1}{7} .\log_a a$

Řešené příklady:

1) Logaritmujeme:

a) $\sqrt[4]{c^3}$

$\Rightarrow \log_a \sqrt[4]{c^3} = \frac{1}{4}.\log_a c^3 = \frac{3}{4}\log_a c$

b) $\frac{\sqrt{x}}{by}$

$\Rightarrow \log_a \frac{\sqrt{x}}{by} = \log_a \sqrt{x} - \log_a by = \frac{1}{2}\log_a x - \log_a b - \log_a y$

$c)\frac{2}{gh}$

$\Rightarrow \log_a \frac{2}{gh} = \log_a 2 - (\log_a g.h) = \log_a 2 - (\log_a g + \log_a h) = \log_a 2 - \log_a g - \log_a b$

$d)\sqrt{dx^2 y}$

$\Rightarrow \log \sqrt{dx^2 y} = \frac{1}{2}\log_a dx^2 y = \frac{1}{2}\left(\log_a d + \log_a x^2 + \log_a y\right) = \frac{1}{2}\left(\log_a d + 2\log_a x + \log_a y\right)$

2) Určete výraz, jehož logaritmováním jsme dostali: (odlogaritmujte)

$a)\log_a c - \log_a 2 - \log_a b = \log_a \frac{c}{2} - \log_a b = \log_a \frac{\frac{c}{2}}{b} = \log_a \frac{c}{2b}$

$b)\log_a (a+3) - \log_a (a-3) = \log_a \frac{(a+3)}{(a-3)}$

Dekadický logaritmus: $\log_{10} x = \log x$

Přirozený logaritmus: $\log_e x = \ln x$

e = 2,71 (Eulerova konstanta)

Logaritmické rovnice

= rovnice, kde neznámá se vyskytuje v argumentu logaritmu

Každé řešení by mělo být doplněno o podmínky tak, aby logaritmy neměly záporné argumenty.

Typy logaritmických rovnic

1) Rovnice, kde se vyskytují logaritmy s různými argumenty

a) Řešíme buď převodem na logaritmy se stejnými argumenty a dále substitucí (logaritmus je možno nahradit jinou proměnnou)

b) Řešíme převodem na rovnost 2 logaritmů a dále porovnáváme argumenty

Příklad:

$5.\ log\ x^3 - 4.\ log\ x^6 + \frac{1}{2} logx^8 = 9 - logx^6$

Řešení: Pod: x > 0

$5.\ log\ x^3 - 4.\ log\ x^6 + \frac{1}{2} logx^8 = 9 - logx^6$

rovnici nejprve upravíme podle pravidel pro logaritmování na tvar

$5.3.\log x - 4.6.\log x + \frac{1}{2}.8.\log x = 9 - 6.\log x$ dále použijeme substituci $log\ x = y$

$15y - 24y + 4y = 9 - 6y$

$\underline{\underline{y = 9}}$

Příklad:

$log\ x + log(x + 1) = log\ 2x$

Řešení: Pod: x > 0

rovnici nejprve upravíme podle pravidel pro logaritmování na tvar

$log\ x.(x + 1) = log\ 2x$

$x.(x + 1) = 2x$

$x^2 + x - 2x = 0$

$x^2 - x = 0$

$x.(x - 1) = 0$

$\cancel{x_1 = 0}$ $x_2 = 1$

První kořen nemůže být kořenem rovnice, protože argument logaritmu musí být číslo větší než 0.

Příklad:

$\log(3x + 4) - \log(7x - 3) = 1 + \log\frac{11}{10}$

Řešení: Pod: $x > \frac{3}{7}$

$\log(3x + 4) - \log(7x - 3) = 1 + \log\frac{11}{10}$

$\log(3x + 4) = \log(7x - 3) + \log 11 - \log 10 + 1$ číslo 1 musíme také nahradit logaritmem:

$\log_{10} y = 1$?

$y = 10^1$ $y = 10$

$\log(3x + 4) = \log(7x - 3) + \log 11 - \log 10 + \log 10$

$\log(3x + 4) = \log(7x - 3) \cdot 11$

$(3x + 4) = (7x - 3) \cdot 11$

$(3x + 4) = (77x - 33)$

$37 = 74x$ $x = \frac{1}{2}$

Zkouška:

$$L = \log\left(3\cdot\frac{1}{2}+4\right) - \log\left(7\cdot\frac{1}{2}-3\right) = \log 5{,}5 - \log 0{,}5 = \log\frac{55}{5} = \log 11$$

$$P = 1+\log\frac{11}{10} = \log 10 + \log\frac{11}{10} = \log 10.\frac{11}{10} = \log 11$$

L = P

2) Rovnice kde se vyskytují logaritmy se stejnými argumenty - řešíme vždy substitucí.

Příklad:

$$\log x - \frac{3}{\log x} = 2$$

Řešení: Pod: $x > 0$

Substituce: $\log x = y$

$$y - \frac{3}{y} = 2 \quad /.y$$

$y^2 - 3 = 2y$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y+1)(y-3) = 0$

$y_1 = -1 \quad y_2 = 3$

$\log x = -1$	$\log x = 3$
$x = 10^{-1}$	$x = 10^3$
$x_1 = 0{,}1$	$x_2 = 1000$

Cvičení:

1.) $\dfrac{5\log x+3}{3\log x-4} = \dfrac{\log x+5}{3\log x-4} - 2$ $[10]$

2.) $\dfrac{1}{4\log+7} + 1 = \dfrac{36-2\log x}{8\log x+14}$ $[100]$

3.) $\dfrac{\log x - \frac{1}{4}}{1-\log x} = \dfrac{1}{2}$ $[\sqrt{10}]$

4.) $\dfrac{\log(x^2+5)}{2\log(x-3)} = 1$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

5.) $\log x + \dfrac{3}{\log x} = 4$ $[10{,}1000]$

6.) $\log_3 x^2 - \log_3 x^4 + \log_3 x^3 = -3$ $[\frac{1}{27}]$

7.) $\dfrac{\log(2x+10)}{2} = \log(x+1)$ $[3]$

8.) $\dfrac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$ $[6]$

9.) $\log_6 z - 1 = \log_6(z-1)$ $[\frac{6}{5}]$

10.) $1 + \log_8 x = \log_8(5-x) + 3\log_8 x$ [NŘ]

11.) $-2.\log_{0,5}(4-x) = 3 - \log_{0,5}(10-x)$ [5]

$12.)\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{x-1}=2-\log 2$ $\left[\sqrt{2501}\right]$

$13.)\dfrac{\log\frac{5}{3}(x-2)}{\log(x-2)}=2$ $\left[\dfrac{11}{3}\right]$

$14.)\log\sqrt{x^2-4}-\log\sqrt{x+2}=\log 5$ $[27]$

$15.)\log 15x^2+\log 0{,}6x=\log 81^2$ $[9]$

$16.)\log(2x+9)-2\log x+\log(x-4)=2-\log 50$ $[36]$

$17.)\dfrac{\log x}{1-\log 2}=2$ $[25]$

$18.)\log\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\log\dfrac{1}{2}-\log x$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

$19.)\log_8\sqrt{3-x}+\log_8\sqrt{2x+18}=1$ $[-1,-5]$

$20.)\log(3x-4)^2+\log(7x-9)^2=2$ $\left[2,\dfrac{13}{21}\right]$

Exponenciální rovnice

Jsou to rovnice, ve kterých se vyskytuje neznámá v exponentu mocniny. Různé typy:

a) Typ $a^x = b$

Řeší se buď logaritmováním nebo pokud je to možné převedením na rovnost mocnin se stejným základem.

Příklad.

$4^x = 9$

logaritmováním: $x \log 4 = \log 9$

$x = \dfrac{\log 9}{\log 4} = 1{,}584$ (Výpočet dekadických logaritmů proveden na kalkulačce)

Příklad.

$3^x = 9 \longrightarrow 3^x = 3^2 \longrightarrow \underline{x = 2}$

b) Typ $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Řeší se buď logaritmováním nebo převedením na rovnost dvou mocnin se stejným základem.

Příklad:

$5^{1-x} = 7^{x-1}$

Řešení: $(1 - x) .\log 5 = (x - 1) \log 7$

$\log 5 - x \log 5 = x \log 7 - \log 7$

$\log 5 + \log 7 = x (\log 7 + \log 5) /: ( )$

$\underline{x = 1}$

Příklad:

$5^{1-x} = 25^{x+1}$

Řešení:

$$5^{1-x} = 5^{2(x+1)}$$

1-x = 2x + 2 $\qquad x = -\frac{1}{3}$

-1 = 3x

c) Typ , kde se vyskytuje více mocnin v součtech nebo rozdílech.

Řeší se substitucí nebo zlogaritmováním

Příklad:

$$3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^{x+1} = 171$$

Řešení:

$$3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^{x+1} = 171$$ nejprve upravíme exponenty na stejný typ

$$\frac{3^x}{3} + 3^2 3^x - 3.3^x = 171$$

$$3^x + 27.3^x - 9.3^x = 171$$

$$Substituce: 3^x = y$$

$$y + 27y - 9y = 171$$

$$19y = 171/:19$$

$$y = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Příklad:

$$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 2^{x+1} = 12$$

Řešení:

$$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 2^{x+1} = 12$$

$$\frac{2^{2x}}{2} + 2^2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 12$$

$$2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 12$$

$$\left(2^x\right)^2 + 4 \cdot 2^x - 12 = 0$$

Substituce: $2^x = y$

$y^2 + 4y - 12 = 0$

$(y+6).(y-2) = 0$

$y_1 = -6$ $\qquad y_2 = 2$

$2^x = -6$ $\qquad 2^x = 2$

neřeš. $\qquad \underline{x = 2}$

-

Příklad:

$$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$$

$$4^x - 4^{x+3} = -3^{x+2} - 3^{x+4} \; /. (-1)$$

$$4^{x+3} - 4^x = 3^{x+2} + 3^{x+4}$$

$$4^x .4^3 - 4^x = 3^x .3^2 + 3^x .3^4$$

$$4^x (4^3 - 1) = 3^x (3^2 + 3^4)$$

$$4^x .63 = 3^x .90 /: 9$$

$$7 .4^x = 10 .3^x$$

$$\frac{7}{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$$\log 0,7 = x . \log 0,75$$

$$x = \frac{\log 0,7}{\log 0,75}$$

$$x = \underline{1,24}$$

Exponenciální rovnice - cvičení

1.) $2^{2x-4} = 2^{5-x}$	[3]
2.) $2^{x} = 32 - 2^{x}$	[4]
3.) $6^{x-1} = 5 + 6^{x-2}$	[2]
4.) $5^{x+2} . 2 - 5^{x+1} = 45$	[0]
5.) $5^{x} - 5^{x} . 5 + 500 = 0$	[3]
6.) $4^{x+1} + 4^{x} = 320$	[3]
7.) $5^{2x} - 3 . 5^{x} = 10$	[1]
8.) $5^{x} + 3 . 5^{x-2} = 140$	[3]
9.) $2 . 3^{x+1} - 4 . 3^{x-2} = 450$	[4]
10.) $5^{x} - 5^{3-x} = 20$	[2]
11.) $5^{2x-3} = 2 . 5^{x-2} + 3$	[25]
12.) $3^{2x-1} - 3^{2x-4} = 315 - 3^{2x-2}$	[3]
13.) $49^{x} - 6 . 7^{x} + 5 = 0$	[0 ; 0,83]
14.) $16^{x} = 6 . 4^{x} - 8$	[1; 0,5]
15.) $121^{x} = 22 + 9 . 11^{x}$	[1]
16.) $3^{2x+1} - 3 . 3^{x+2} = 3^{x} - 9$	[-1; 2]
17.) $4^{x} + 7 . 2^{x-2} = 0{,}5$	[-2]
18.) $9^{x-1} + 7 = 4 (3^{x-1} + 1)$	[9 , 3]
19.) $2^{3x} . 4^{3x-3} = 8^{2x+1}$	[3]
20.) $5^{2x} - 7^{x} - 35 . 5^{2x} + 35 . 7^{x} = 0$	[0]
21.) $3^{2x-1} + 3^{x} - 3^{0} = 3^{-1}$	[0]
22.) $4^{x+1} - 8 . 4^{x-1} = 32$	[2]
23.) $5^{x} + 1 - 3 . 5^{x} = - 49$	[2]
24.) $4 . 3^{x+1} - 3^{x-1} = 315$	[3]
25.) $5 . 4^{x+1} - 4^{x+2} = 4^{x-1} + 240$	[3]
26.) $25^{2x} - 3 . 25^{x} = 10$	[0,5]
27.) $5 . 2^{x+2} - 6 . 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 . 2^{x+1}$	[- 4]
28.) $4^{x} - 10 . 2^{x-1} = 24$	[3]
29.) $11^{3x-2} + 13^{3x-2} = 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$	$\left[\frac{2}{3}\right]$
30.) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x} + 5^{x+1} + 5^{x+2}$	$\left[\frac{\log 13 - \log 31}{\log 5 - \log 3}\right]$
31.) $3 . 3^{x} + 4 . 3^{x+1} + 5 . 3^{x+2} = 405 . 2^{x-1}$	[3]
32.) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$	[9]
33.) $4 . 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$	[3]