# *Lineární rovnice*

## *Definice:*

Lineární rovnice nazýváme rovnost, kterou lze po ekvivalentních úpravách převést na tvar:

$$ax + b = 0$$

kde x je neznámá (kořen) rovnice. Kořenem rovnice je tedy $x = \frac{-b}{a}$.

Řešit rovnici znamená určit její kořen.

Součástí řešení rovnice bývá obvykle zkouška!

## *Dovolené úpravy rovnice (ekvivalentní úpravy rovnice):*

a) Rovnost zůstane zachována, **přičteme-li k oběma stranám totéž číslo nebo výraz.**
b) Rovnost zůstane zachována, **násobíme-li obě strany týmž číslem nebo výrazem různým od 0.**
c) Rovnost zůstane zachována, **převedeme-li kterýkoli člen z jedné strany rovnice na druhou s opačným znaménkem.**
d) Rovnost zůstane zachována, **vyměníme-li strany rovnice.**

## *Příklady:*

1) Řešte rovnici 2x + 4 = 12 (rovnici upravíme tak, že na levé straně ponecháme všechny členy s x a na pravou převedeme ostatní → číslo 4 se zn. -)

2x = 12 -4
2x = 8 / :2 (celou rovnici dělíme č. 2)
<u>x = 4</u>

Součástí řešení rovnice je i zkouška ( vypočtený kořen dosadíme nejprve do levé strany rovnice, potom do pravé strany rovnice -obě se sobě musí rovnat.)

<u>Zk:</u> L = 2 . 4 + 4 = 12 P = 12 <u>L=P</u>

2) Řešte rovnici 5x - 2 = 2x + 10 (rovnici upravíme tak, že na levé straně ponecháme všechny členy s x a na pravou převedeme ostatní.)

5x - 2x = 10 + 2
3x = 12 / :3 ( celou rovnici dělíme č. 3)
<u>x = 4</u>

<u>Zk:</u> L = 5 . 4 - 2 = 18 P = 2 . 4 + 10 = 18 <u>L=P</u>

3) Řešte rovnici 2x - [ ( 8x + 9) + 7 ] = 5 - (7 - 8x) (nejprve odstraníme závorky)

2x - [ 8x + 9 + 7 ] = 5 - 7 + 8x (je-li před závorkou -, mění se znaménka všech členů v závorce.)
2x - 8x - 16 = -2 + 8x (rovnici upravíme tak, že na levé straně ponecháme všechny členy s x a na druhou převedeme ostatní)
-6x - 8x = -2 + 16
-14x = 14 / : (-14) (celou rovnici dělíme č. -1)
<u>x = -1</u>

<u>Zk:</u> L = 2 . (-1) -[(8 . (-1) + 9) + 7 ] = -2 - [(-8 + 9) +7 ] = -2 -[1 + 7 ] = -2 - 8 = <u>-10</u>
P = 5 - (7 - 8.(-1)) = 5 -(7 + 8) = <u>-10</u> <u>L=P</u>

4) Řešte rovnici $\frac{x+4}{3} + \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{x+4}{4}$ / .12 (rovnici vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů)

$4.(x+4) + 6.(x-1) = 12 + 3.(x+4)$ (roznásobíme závorky)

$4x + 16 + 6x - 6 = 12 + 3x + 12$ (rovnici upravíme tak, že na levé straně ponecháme všechny členy s x a na pravou převedeme ostatní)

$10x - 3x = 24 - 10$

$7x = 14 \quad / :7$

$\underline{x = 2}$

<u>Zk:</u> $L = \frac{2+4}{3} + \frac{2-1}{2} = \frac{6}{3} + \frac{1}{2} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$

$P = 1 + \frac{2+4}{4} = 1 + \frac{6}{4} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ <u>L=P</u>

5) Řešte rovnici

$$\frac{3}{2} - \frac{10+x}{2x} = 0 \qquad /.2x$$

$$3x - (10+x) = 0$$

$$3x - 10 - x = 0$$

$$2x = 10 \qquad / :2$$

$$x = 5$$

**!** Protože tato rovnice má neznámou obsaženu ve jmenovateli zlomku, musíme řešení doplnit o podmínky, za kterých má smysl. Ve jmenovateli zlomku nesmí být nula. Podmínka: $x \neq 0$

Zk: $L = \frac{3}{2} - \frac{10+5}{2{,}5} = \frac{3{,}5 - 15}{10} = 0$ P = 0 <u>L = P</u>

6)Řešte rovnici : $5 + \frac{3}{3x-12} = \frac{5-x}{x-4}$ (ze jmenovatele prvního zlomku vytkneme č.3)

$$5 + \frac{3}{3.(x-4)} = \frac{5-x}{x-4}$$

(rovnici vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů - výrazem 3. (x-4) )

$5.4.(x-4) + 3 = (5-x) . 3$ (roznásobíme závorky)

$15x - 60 + 3 = 15 - 3x$

$15x + 3x = 15 + 57$

$18x = 72 \quad /:18$

$x = 4$

$$P: x - 4 \neq 0$$
$$x \neq 4$$

Kořen který vyšel při řešení rovnice je v rozporu s podmínkami, rovnice proto nemá žádné kořeny.

7) Řešte rovnici $\frac{x+3}{2} - \frac{2x-1}{3} = \frac{3x+4}{4} - \frac{11x-10}{12} \qquad /.12$

$$6 \cdot (x+3) - 4 \cdot (2x-1) = 3 \cdot (3x+4) - (11x-10)$$

$$6x + 18 - 8x + 4 = 9x + 12 - 11x + 10$$

$$-2x + 22 = -2x + 22$$

$$0 = 0$$

Tato rovnost nevede k určení kořenu x. Rovnost platí $\Rightarrow$ rovnice má <u>**nekonečně mnoho řešení**</u>.

8)Řešte rovnici: $\frac{3x-2}{2}-\frac{x+2}{4}=\frac{10x-3}{8} \quad /.8$

$$4(3x-2)-2(x+3)=10x-3$$
$$12x-8-2x-6=10x-3$$
$$10x-14=10x-3$$
$$0=11$$

Tato rovnost nevede k určení kořenu x. Rovnost neplatí $\Rightarrow$ rovnice **<u>nemá žádné řešení.</u>**

## *<u>Lineární rovnice -cvičení</u>*

1) Řešte rovnice:

$a)6-a=4$

$b)\frac{3}{5}b=-0{,}6$

$c)3x+10-2x-5=4x-1-3x+9$

$d)5(x-1)-(7x-8)=3-2x$

$\left[a)2;b)-1;c)\emptyset\ ;d)\infty\right]$

2) Řešte rovnice:

$a)x-2=3$

$b)7-x=4$

$c)2=-6-x$

$d)5x=10$

$e)4=\frac{m}{0{,}8}$

$f)-1=-\frac{8}{5}t$

$g)\frac{x}{2}=\frac{4}{5}$

$h)\frac{6}{5}=\frac{v}{15}$

$i)-\frac{11}{8}=\frac{6}{7}x$

$\left[a)5;b)3;c)-8;d)2;e)3{,}2;f)\frac{5}{8};g)\frac{8}{5};h)18;i)-\frac{77}{48}\right]$

3) Řešte rovnice:

$a)3-x=2x+15$

$b)8-3x=5-x-2x$

$c)5b-1-3=10+b+8$

$d)5z+2+z=2+7z-z$

$e)13-2x=5x+1$

$f)14+5y-y=6y-2$

$g)p+8-14=2p+3$

$h)9x+21-2x=4x+21$

$\left[a)-4;b)\emptyset\ ;c)5{,}5;d)\infty\ ;e)\frac{12}{7};f)8;g)-9;h)0\right]$

4) Řešte rovnice:

$a)6(y-2)=3+3(y+1)$

$b)4-2(3-x)=x-2-4$

$c)10+6-(x+6)=3(x-10)$

$d)0=(5y-1).4-2(y+7)$

$e)2=(y+1)(2-y)+y^2$

$f)5x=(2-3x).7-4(x+1)$

$g)6-(t-1)(t+1)=t(5-t)$

$h)4x(x-4)=x+(1-2x)^2$

$\left[a)6;b)-4;c)10;d)1;e)0;f)\frac{1}{3};g)1{,}4;h)-\frac{1}{13}\right]$

5) Řešte rovnice:

$a)x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$b)3x=5-\frac{x}{3}$

$c)\frac{6}{7}y+\frac{1}{2}=1$

$d)\frac{11}{4}=z-\frac{5}{6}z$

$e)\frac{1}{2}(y+1)=3$

$f)1+\frac{2y-5}{6}=\frac{y}{3}$

$g)a=\frac{2}{5}(4+3a)$

$h)\frac{3y}{8}-2=\frac{3y-16}{8}$

$i)\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=x-1$

$j)\frac{1}{5}x+0{,}7x=2-\frac{x}{2}$

$k)3y-10-\frac{y}{4}=y+0{,}5$

$l)\frac{x}{3}=\frac{x+3}{7}-\frac{2x+5}{21}$

$\left[a)\tfrac{5}{4};b)1{,}5;c)\tfrac{7}{12};d)16{,}5;e)5;f)\emptyset;g)-8;h)\infty;i)1;j)\tfrac{7}{10};k)6;l)\tfrac{2}{3}\right]$

6) Řešte rovnice:

$a)\dfrac{5}{x}+1=\dfrac{9}{x}-1$

$b)\dfrac{1}{x}=5-\dfrac{2}{3x}$

$c)\dfrac{7}{4y}-\dfrac{1}{2y}+\dfrac{11}{y}=0$

$d)\dfrac{1}{2m}-\dfrac{2}{3m}=\dfrac{5}{6m}+2$

$\left[a)2;b)\tfrac{1}{3};c)\emptyset;d)-\tfrac{1}{2}\right]$

7) Řešte rovnice:

$a)\dfrac{3}{y+2}=\dfrac{1}{3-y}$

$b)\dfrac{5}{6(z+4)}=\dfrac{2}{2z-3}$

$c)\dfrac{3}{3x+3}=\dfrac{10}{10+10x}$

$d)\dfrac{1}{2x-14}-\dfrac{6}{x-7}=1$

$e)\dfrac{12}{1+x}+\dfrac{12x}{x+1}=0$

$f)\dfrac{8y}{3y-15}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{y-5}$

$\left[a)\tfrac{7}{4};b)-31{,}5;c)R-\{-1\};d)1{,}5;e)\emptyset;f)-2\right]$

1) Řešte rovnici: $\dfrac{12-x}{4}+\dfrac{x+8}{3}=\dfrac{22-x}{6}$ [ - 8 ]

2) Řešte rovnici: $x-2\tfrac{1}{2}=\dfrac{4x+3}{4}-\dfrac{2-3x}{8}$ [ - 8 ]

3) Řešte rovnici: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}=1$ [ 6 ]

4) Řešte rovnici: $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x}=20$ $\left[\tfrac{1}{2}\right]$

5) Řešte rovnici: $\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{4n}=1\tfrac{3}{4}$ [ 1 ]

6) Řešte rovnici: $\dfrac{5}{4y}+\dfrac{6}{5y}+\dfrac{7}{6y}=3\tfrac{37}{60}$ [ 1 ]

7) Řešte rovnici: $\dfrac{9+x}{x}-5=\dfrac{6}{x}$ $\left[\tfrac{3}{4}\right]$

8) Řešte rovnici: $\dfrac{7}{u}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{23-u}{3u}+\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{4u}$ [ 5 ]

9) Řešte rovnici: $\dfrac{x+3}{x-5}+\dfrac{x-10}{x-8}=2$ [ 9 ]

10) Řešte rovnici: $\dfrac{a-1}{a+7}+\dfrac{a+6}{a+4}=2$ [ -3 ]

11) Řešte rovnici: $\frac{5z-4}{z-4}-\frac{z+6}{z+2}=4$ [ 2 ]

12) Řešte rovnici: $\frac{7m+4}{m+1}+\frac{2m+9}{m-3}=9$ [ -2 ]

13) Řešte rovnici: $\frac{3y-4}{y+4}+\frac{6y-4}{3y-7}=5$ [ 4 ]

14) Řešte rovnici: $\frac{2\mathrm{k}+3}{3\mathrm{k}+1}-\frac{\mathrm{k}+5}{3\mathrm{k}+1}=\frac{1}{4}$ [ 9 ]

15) Řešte rovnici: $\frac{1}{6}+\frac{x+2}{3x-3}=\frac{2x-1}{2(x-1)}+\frac{1-x}{2x-2}$ [ nemá řeš. ]

16) Řešte rovnici: $\frac{m+1}{m-1}-\frac{5}{2m-2}=\frac{m}{0{,}5m-0{,}5}-3{,}5$ [ 2 ]

17) Řešte rovnici: $(2y-3)^2+(3y-4)^2+(4y-5)^2=29y^2-26$ [ 1 ]

18) Řešte rovnici: $(2x-5)(8x-1)-(4x-3)^2=12(x-1)-7$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

19) Řešte rovnici: $(6-k)^2-(k-3)^2=(5-k)^2-(k-2)^2+5$ [ nemá řeš. ]

20) Řešte rovnici: $(5-y)^2+(y-3)^2=(6-y)^2-6+(y-2)^2$ [ nekoneč. mnoho řeš. ]

21) Řešte rovnici: $\frac{x-2}{5}-\frac{2x-9}{10}=\frac{5}{x+3}$ [ 7 ]

22) Řešte rovnici: $\frac{3y-2}{6}-\frac{y-2}{2}=\frac{4}{y+3}$ [ 3 ]

23) Řešte rovnici: $\frac{n+3}{3}-\frac{8}{n+11}=\frac{3n+1}{9}$ [ -2 ]

24) Řešte rovnici: $\frac{2a+7}{6}-\frac{a+4}{3}=\frac{2}{a-6}$ [ -6 ]

25) Řešte rovnici: $\frac{4k+5}{8}-\frac{k+1}{2}=\frac{1}{k+13}$ [ -5]

26) Řešte rovnici: $\frac{x+7}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=-\frac{3}{x^2-4}$ [ -1 ]

27) Řešte rovnici: $\frac{y-2}{y-1}+\frac{4-y}{y+1}=\frac{6}{y^2-1}$ [ 3 ]

28) Řešte rovnici: $\frac{d-4}{d+3}-\frac{10}{d^2-9}=\frac{d-6}{d-3}$ [ 5 ]

29) Řešte rovnici: $\frac{g+1}{2g-3}-\frac{7}{4g^2-9}=-\frac{4-g}{2g+3}$ [ 1 ]

30) Řešte rovnici: $\frac{2k+1}{k+3}-\frac{2k+7}{k-1}=\frac{6}{k^2+2k-3}$ [ -2 ]

31) Řešte rovnici: $\frac{3x+13}{3x+2}-\frac{1}{6x^2+x-2}=\frac{2x+1}{2x-1}$ [ 1 ]

32) Řešte rovnici: $\frac{a+1}{4}-\frac{3a-1}{12}=\frac{4}{9-a}$ [ -3 ]

33) Řešte rovnici: $\frac{7t-4}{14}-\frac{3}{3t+8}=\frac{t-1}{2}$ [ 2 ]

34) Řešte rovnici: $\frac{2}{(3-x)(x-1)}=\frac{2}{(x-1)(x+7)}$ [ -2 ]

35) Řešte rovnici: $\frac{3}{(y-2)(y+3)}=\frac{1}{(y-2)(y-1)}$ [ 3 ]

36) Řešte rovnici: $\frac{x}{x^2-x-12}+2+\frac{11+3x}{x+3}=\frac{5x}{x-4}$ [ - 4 ]

37) Řešte rovnici: $\frac{3(1+m)}{2}-\left(\frac{1+m}{4}+1\right)=\frac{5m+1}{7}-\left(\frac{3m-1}{2}-3\right)$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

38) Řešte rovnici: $\frac{9x}{8}-\left(\frac{x-2}{6}+\frac{5x-4}{12}\right)-\left(x-\frac{3x+2}{3}-\frac{3x}{4}\right)=6+\frac{2x+1}{3}$ [ 8 ]

39) Řešte rovnici: $\frac{1}{2}\left(3g-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(4g-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}(6g-5)-\frac{2}{3}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

40) Řešte rovnici: $(k+1)^3-(k-1)^3=6(k+2)(k-1)+9(k+1)-9(k-1)$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

41) Řešte rovnici: $\frac{2-\frac{y}{4}}{3}+2=y-\frac{1-\frac{3y}{2}}{4}$ [ 2 ]

42) Řešte rovnici: $\frac{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}}{2-x}=-\frac{1}{8}$ [ -6 ]

43) Řešte rovnici: $\frac{\frac{y}{10}+\frac{6}{5}}{y-5}=\frac{2}{3}$ [ 8 ]

## <u>*K v a d r a t i c k é   r o v n i c e*</u>

Jsou to rovnice, které dovolenými úpravami lze převést na tvar

$$\mathbf{a\,x^2+b\,x+c=0} \qquad \text{kde } a \neq 0$$

a $x^2$ - člen kvadratický
b x - člen lineární
c - člen absolutní

### <u>*1.) Rovnice ryze kvadratická*</u>

- je to rovnice, ve které chybí lineární člen

$$\mathbf{a\,x^2+c=0}$$

Tato rovnice má buď dva kořeny: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ nebo nemá reálné kořeny

Tato rovnice - má 2 kořeny pouze pro $-\frac{c}{a} \succ 0$

- má 1 kořen pro $-\frac{c}{a} = 0$

- nemá žádný reálný člen pro $-\frac{c}{a} \prec 0$

<u>Příklad:</u> Řešte rovnici $3x^2 - 75 = 0$

<u>Řešení:</u> $3x^2 - 75 = 0 \quad /:3$

$x^2 - 25 = 0$

rozložíme podle vzorce: $(x - 5).(x + 5) = 0$

$x_1 = 5 \; ; \; x_2 = -5$

Zkouška: $x_1$: $L = 3 \, . \, 5^2 - 75 = 3 \, . \, 25 - 75 = 75 - 75 = 0$

$P = 0 \qquad \underline{L = P}$

$x_2$: $L = 3. \, (-5) - 75 = 3 \, . \, 25 - 75 = 75 - 75 = 0$

$P = 0 \qquad \underline{L = P}$

<u>Příklad:</u> Řešte rovnici $4x^2 + 16 = 0$

<u>Řešení:</u> $4x^2 + 16 = 0$ nejde rozložit podle vzorce

$4x^2 = -16 \quad /:4$

$x^2 = -4$

$x_1 = \sqrt{-4} \qquad x_2 = -\sqrt{-4}$

Rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení.

<u>Příklad:</u> Řešte rovnici $(x + 1)(x + 3) = 4(x + 2)$

<u>Řešení:</u> Nejprve roznásobíme závorky: $x^2 + x + 3x + 3 = 4x + 8$

$x^2 + 4x + 3 = 4x + 8 \quad /-4x$

$x^2 + 3 = 8 \quad /-8$

$x^2 - 5 = 0$

Dostali jsme ryze kvadratickou rovnici, rozložíme: $(x + \sqrt{5}).(x - \sqrt{5}) = 0$

$x_1 = \sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{5}$

Zkouška: $x_1 = \sqrt{5}$ : $L = (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 3) = 5 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3 = 8 + 4\sqrt{5}$
$P = 4(\sqrt{5} + 2) = 4\sqrt{5} + 8$
$L = P$

$x_2 = -\sqrt{5}$ : $L = (-\sqrt{5} + 1)(-\sqrt{5} + 3) = 5 - \sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 3 = 8 - 4\sqrt{5}$
$P = 4(-\sqrt{5} + 2) = -4\sqrt{5} + 8 = 8 - 4\sqrt{5}$
$L = P$

Cvičení :

1.) $(3 - 2y)^2 = (y - 6)^2$ [$\pm$ 3]

2.) $\dfrac{5}{13-x} - \dfrac{13}{5} = \dfrac{x}{5}$ [$\pm$ 12]

3.) $\dfrac{x+2}{x+8} = \dfrac{x-2}{8-x}$ [$\pm$ 4]

4.) $\dfrac{-4}{1-4x} - \dfrac{4}{1+4x} = 1$ [$\pm \frac{3}{4}$]

5.) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+12} = \dfrac{1}{x}$ [$\pm$ 6]

## *2. Rovnice bez absolutního členu*

Tento typ rovnice řešíme vždy vytýkáním :

$$\mathbf{ax^2+bx = 0}$$

vytkneme x: $x \cdot (ax + b) = 0$

Odtud dostáváme 2 řešení $x_1 = 0$ $ax_2 + b = 0$ $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Příklad : Řešte rovnici $2x^2 - 3x = 0$

Řešení : vytkneme x : $x \cdot (2x - 3) = 0$
odtud : $x_1 = 0$ $2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x_2 = \frac{3}{2}$

Rovnice má dva kořeny : $x_1 = 0$ , $x_2 = \dfrac{3}{2}$

Zkouška : $x_1$ : $L = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$ $P = 0$ $L = 0$
$x_2$ : $L = 2 \cdot \dfrac{9}{4} - 3 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{18}{4} - \dfrac{9}{2} = \dfrac{18-18}{4} = 0$ $P = 0$ $L = 0$

Cvičení :
Řešte rovnice :

1.) $(x-1).(x-9) = (2x-3)^2$ [$0 , \dfrac{2}{3}$]

2.) $\dfrac{2y+1}{3-y} = \dfrac{1-y}{y+3}$ [ 0 , -11]

3 .) $\dfrac{x+2}{x} = x + \dfrac{2}{x} - 1$ [ 2 ]

4.) $3 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{9}{3x - x^2} = 0$ [ 2 ]

5.) $3x^2 + 27x = 0$ [ 0, -9 ]

## *3) Úplná kvadratická rovnice*

Kořeny kvadratické rovnice upravené na tvar **$ax^2 + bx + c = 0$** vypočteme pomocí 2 vzorců :

diskriminant $D = b^2 - 4 . a . c$

vzorce pro výpočet kořenů $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

diskriminant rozhoduje o počtu kořenů rovnice:
a) D > 0 ........ 2 různé reálné kořeny
b) D = 0 .........1 kořen
c) D < 0 ..........0 kořenů v oborů reálných čísel

Příklad: Řešte rovnici $x^2 - x - 2 = 0$

Řešení : $D = b^2 - 4ac$ $a = 1$ $b = -1$ $c = -2$

$D = (-1)^2 - 4 . 1 . (-2) = 1 + 8 = 9$ $\sqrt{D} = 3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} =$ $x_1 = 2$

$x_2 = -1$

Zkouška: $x_1$ : $L = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ $P = 0$ $L = P$

$x_2$: $L = (-1)^2 - (-1) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ $P = 0$ $L = P$

Příklad :

Řešte rovnici $\dfrac{x-1}{x+3} - \dfrac{x-3}{x+1} = 2$

Řešení : Rovnici musíme nejprve upravit na základní tvar. Protože neznámá se vyskytuje ve jmenovateli, musíme doplnit řešení o podmínky : $x + 3 \neq 0$ $x \neq -3$
$x + 1 \neq 0$ $x \neq -1$

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1} = 2 \qquad /. (x + 3) (x + 1)$$

$$( x - 1 ) ( x + 1 ) - ( x - 3 ) ( x + 3 ) = 2 ( x + 3 ) ( x + 1 )$$
$$x^2 - 1 \quad - \quad ( x^2 - 9 ) \ = 2 ( x^2 + 3x + x + 3 )$$
$$x^2 - 1 \quad - \quad x^2 + 9 \ = 2x^2 + 8x + 6$$
$$8 \ = 2x^2 + 8x + 6 \qquad / :2$$
$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

Rovnice je nyní v základním tvaru: $a = 1 ; b = 4 ; c = -1$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 16 - 4 . 1 (-1) = 16 + 4 = 20$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Kořeny ponecháme ve tvaru s odmocninou:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-2 + \sqrt{5})}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2\left(-2 - \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{5} \qquad x_2 = -2 - \sqrt{5}$$

Zkoušku provedeme pouze pro jeden kořen, pro druhý je obdobná:

$$x_1 = -2 + \sqrt{5} \qquad L = \frac{-2 + \sqrt{5} - 1}{-2 + \sqrt{5} + 3} - \frac{-2 + \sqrt{5} - 3}{-2 + \sqrt{5} + 1} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5} - 3\right)\left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(5 - \sqrt{5}\right)\left(1 + \sqrt{5}\right)}{\left(1 + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)} = \frac{5 - 3\sqrt{5} - \sqrt{5} + 3 + 5 - \sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{5 - 1} =$$

$$= \frac{8}{4} = 2 \qquad P = 2 \qquad L = P$$

<u>Příklad</u>:

Řešte kvadratickou rovnici : $2 + \frac{3\left(2x - 5\right)}{x + 4} + \frac{2}{3x - 1} = 0$

<u>Řešení:</u> Rovnici násobíme jmenovateli: $(x+4) (3x-1)$

Dostaneme $2(x+4)(3x-1) + 3(2x-5)(3x-1) + 2(x+4) = 0$

Roznásobíme $2(3x^2+11x-4) + 3(6x^2-17x+5) + 2x + 8 = 0$

$$6x^2+22x - 8 + 18x^2 - 51x + 15 + 2x + 8 = 0$$
$$24x^2-27x + 15 = 0 \ / :3$$
$$8x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$D = b^2-4ac$$
$$D = 81 - 4.8.5 = 81 - 160 = -79$$

$D < 0$ rovnice nemá reálný kořen

Podmínky : $x \neq -4$ $\quad x \neq \frac{1}{3}$

*Cvičení*
Řešte rovnice

1.) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{x^2}{9}-3$ $\quad \left[-\frac{9}{4},12\right]$

2.) $(2x+3)^2-x=2x^2-27$ $\quad [-6]$

3.) $\frac{x^2+1}{2x}-\frac{29}{20}=0$ $\quad \left[\frac{5}{2},\frac{2}{5}\right]$

4.) $\frac{x}{63}-\frac{2}{7}=\frac{1}{x}\left(\frac{7}{9}-\frac{9}{7}\right)$ $\quad [16,2]$

5.) $\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)(x-1)=(x-2)x$ $\quad \left[\frac{8}{3},\frac{2}{5}\right]$

6.) $\frac{2x}{7x-2}+\frac{3}{6-3x}=\frac{5}{4}$ $\quad \left[\frac{2}{3}\right]$

7.) $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=1$ $\quad \left[5\pm\sqrt{7}\right]$

8.) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ $\quad \left[2,\frac{1}{2}\right]$

9.) $\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}$ $\quad$ [-9 , 1]

10.) $3x^2-\frac{1}{8}x+7=0$ $\quad$ [ nemá řešení v R]

11.) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{5}{2}$ $\quad$ [ 0 , 3 ]

12.) $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{x-4}{x+1}$ $\quad$ [ -11 , 1 ]

13.) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1).(x+2)}$ $\quad$ [ -3 ]

14.) $(x-2)^3=(x+1)^3+9.(x-5)$ [ -2 , 2 ]

15.) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}=\frac{x+5}{6}$ $\left[-\frac{5}{6},5\right]$

15.) $\frac{x(x-7)}{3}-1=\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{3}$ $[-0{,}7;10]$

17.) $\frac{2x+19}{5x^2-5}-\frac{3x}{1-x}=3+\frac{17}{x^2-1}$ [ 3 ]

18.) $\frac{3x+2}{x+4}=1+\frac{x-1}{x+3}$ [ 1 , -2 ]

18.) $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-4}-\frac{3}{8}$ [ 6 , -4 ]

19.) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}$ $[\pm 6]$

20.) $\frac{5-3x}{3-5x}+\frac{3-5x}{5-3x}=\frac{5}{2}$ $\left[7;\frac{1}{7}\right]$

21.) $\frac{2x}{x+6}=\frac{x}{6-x}+\frac{36}{4x^2-144}$ $\left[-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$

22.) $\frac{5}{3-2y}+\frac{4}{y-2}=\frac{5}{y+1}$ $\left[\frac{8}{7};4\right]$

23.) $\frac{2x+1}{x-1}-\frac{3x+3}{2x-3}=\frac{x-4}{2x^2-5x+3}$ $[4]$

24.) $3\frac{x+1}{x+5}-\frac{3x+15}{x^2+2x-15}+\frac{x-12}{x-3}=0$ [ 7 , -3 ]

## *Kvadratická rovnice - cvičení:*

1) $(2x+3)\cdot(3x-4)+(4x-5)\cdot(5x+6)=10$ ( ryze )
[ $\pm\sqrt{2}$ ]

2) $(x-2)^2+(x-9)^2=(x-11)^2$ ( ryze )
[ 6 , - 6 ]

3) $\dfrac{x+2}{x} = x + \dfrac{2}{x} - 1$ ( bez abs. členu )

[ 0 nevyh. , 2 ]

4) $\dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{x-5}{x+5} = 2\tfrac{2}{3}$

[ 10, -14 ]

5) $(2x-7)^2 - (3x+2)^2 = 125$

[ -4 ]

6) $\dfrac{x-3}{x} + \dfrac{27}{x(x+3)} = \dfrac{x^2}{x^2+3x} - \dfrac{x-9}{x+3}$

[ 6 , 3 ]

# *Kvadratické rovnice - cvičení*

1. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{5x^2-8}{x^2-1}$ [ -2 , 4 ]

2. $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$ [ 4 , 9 ]

3. $\frac{2x+5}{x}-\frac{14}{x-4}=3$ [ NŘ ]

4. $\frac{3}{3+x}+\frac{3-x}{x}=\frac{11}{10}$ [ 2 , $-\frac{15}{7}$ ]

5. $\frac{x-2}{x}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x(x-2)}$ [ NŘ ]

6. $(2x-7)^2-(3x+2)^2=125$ [ - 4 ]