3

Exponenciální funkce, inverzní funkce, exponenciální rovnice

Exponenciální funkce

Je to funkce daná funkčním předpisem $f: \quad y = a^x$ kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné

Graf exponenciální funkce se nazývá exponenciální křivka (exponenciála).

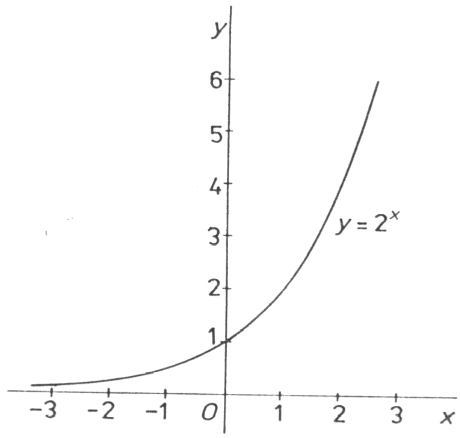
Příklad:

Sestrojte graf funkce $f: \quad y = 2^x$

Řešení :

K sestrojení grafu použijeme tabulku:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{y = 2^x}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



V příkladě bylo $a > 1$ funkce je rostoucí

Příklad:

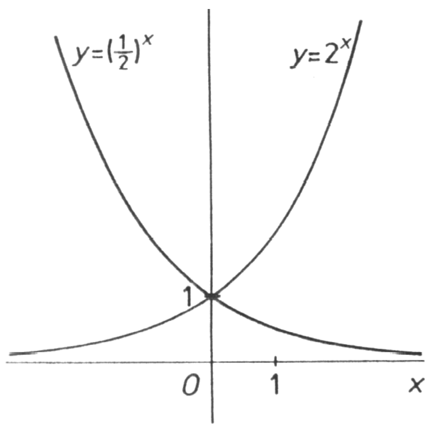
Sestrojte graf funkce

$f: \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Řešení :

K sestrojení grafu použijeme tabulku:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



V příkladě bylo $a < 1$ funkce je klesající.

Tyto dva příklady představovaly dvě základní skupiny exponenciálních funkcí:

a) f : $y = a^x$ kde a je číslo větší než 1

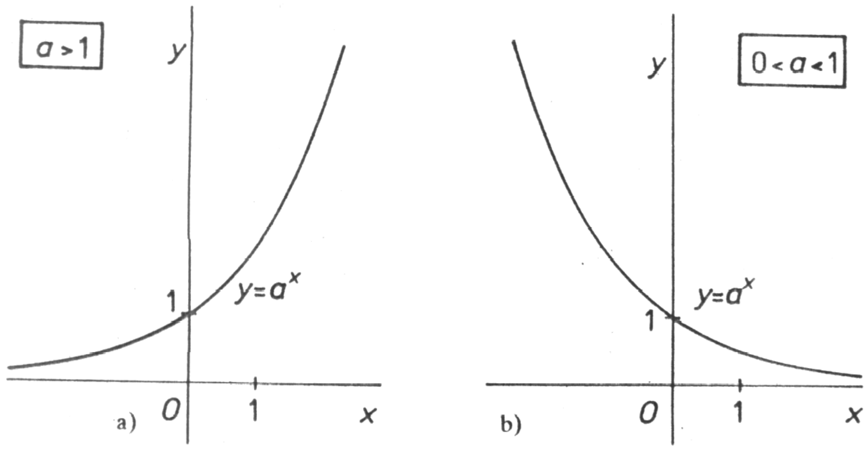
Graf funkce má tento tvar:

- funkce je rostoucí
- prochází vždy bodem [0 , 1]

b) f : $y = a^x$ kde a je číslo větší než 0 a menší než 1 ($0 < a < 1$)

Graf funkce má tento tvar:

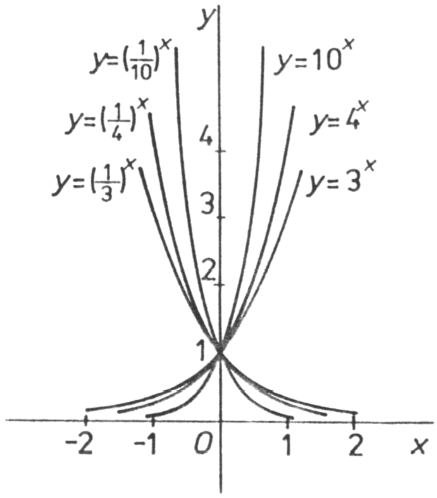
- funkce je klesající



- prochází vždy bodem [0 , 1]

⇒ Mezi exponenciálními funkcemi má zvláštní význam funkce $y = e^x$, kde číslo e je Eulerova konstanta a její přibližná hodnota je e = 2,71828 .

Některé další exponenciální funkce:



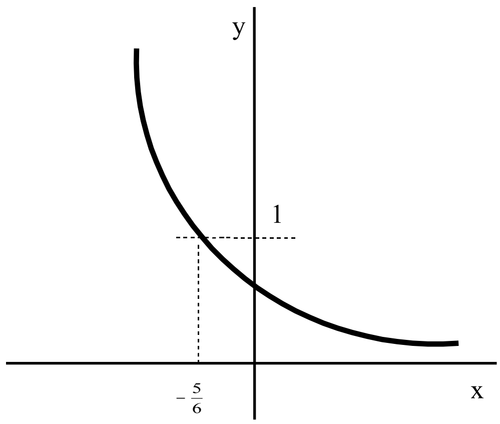
Graf exponenciální funkce se využívá při řešení takovýchto příkladů:

<u>Příklad 1:</u>

Určete zda je číslo $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}$ větší nebo menší než jedna.

<u>Řešení:</u>

Načrtneme si graf funkce $f : y = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x}$



Na osu x vyneseme hodnotu $-\dfrac{5}{6}$

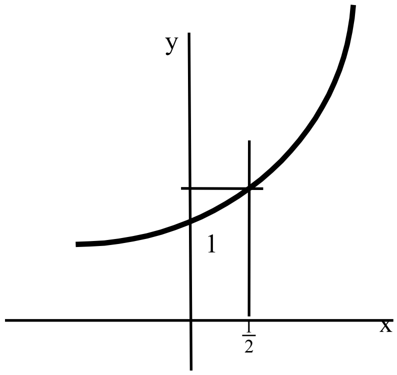
je vidět, že y je větší než 1 tedy $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} > 1$

Příklad 2:

Určete zda je číslo $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna.

Řešení:

Načrtneme si graf funkce $f: y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$

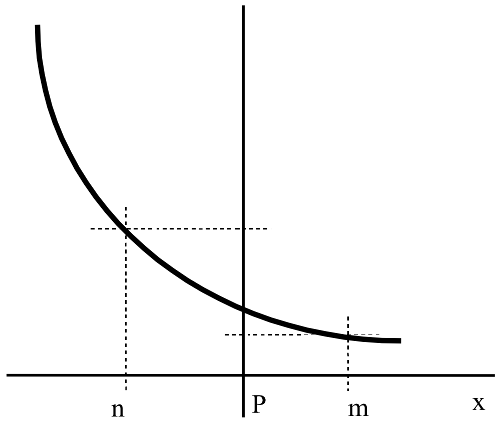


Na osu x vyneseme hodnotu $\frac{1}{2}$

je vidět, že y je větší než 1 tedy $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$

Příklad 3:
Mezi čísla m a n doplňte znaménko nerovnosti:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^{m} \prec \left(\frac{7}{8}\right)^{n} \qquad m???n$$



Řešení:

Načrtneme si graf funkce $f: y = \left(\frac{7}{8}\right)^{x}$

Zvolíme si na ose x čísla m a n tak, aby platilo:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^{m} \prec \left(\frac{7}{8}\right)^{n}$$

číslo m leží více vpravo, tedy musí být
m > n

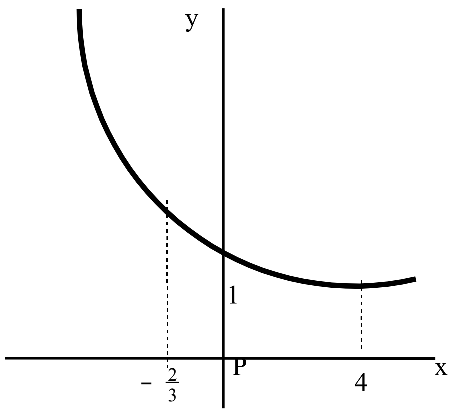
Příklad 4:

Určete zda číslo a je větší než jedna, platí - li : $a^{-\frac{2}{3}} \succ a^{4}$

Řešení:
Protože neznáme hodnotu čísla a nemůžeme určit, zda je funkce rostoucí nebo klesající.

Podobu grafu odhadneme tak, že nejprve vyneseme na osu x čísla $-\frac{2}{3}$ a 4 .

Musí platit $a^{-\frac{2}{3}} \succ a^{4}$. Podle toho doplníme funkci - funkce je klesající - tedy $\boldsymbol{a < 1}$



Cvičení:

1. Určete zda je číslo $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

2. Určete zda je číslo $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

3. Určete zda je číslo $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

4. Určete zda je číslo $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$ větší nebo menší než jedna. Načrtněte obrázek.

5. Mezi čísla m a n doplňte znaménko nerovnosti: $\left(\frac{1}{8}\right)^{m} \prec \left(\frac{1}{8}\right)^{n}$ $\qquad m???n$

6. Mezi čísla m a n doplňte znaménko nerovnosti: $\left(\frac{9}{8}\right)^{m} \succ \left(\frac{9}{8}\right)^{n}$ $\qquad m???n$

7. Určete zda číslo a je větší než jedna, platí - li : $a^{-5} \succ a^{2}$

8. Určete zda číslo a je větší než jedna, platí - li : $a^{-3} \prec a^{4}$

Inverzní funkce:

Inverzní funkci k dané funkci f označujeme f^{-1} a získáme ji způsobem, který bude ukázán na následujícím příkladě:

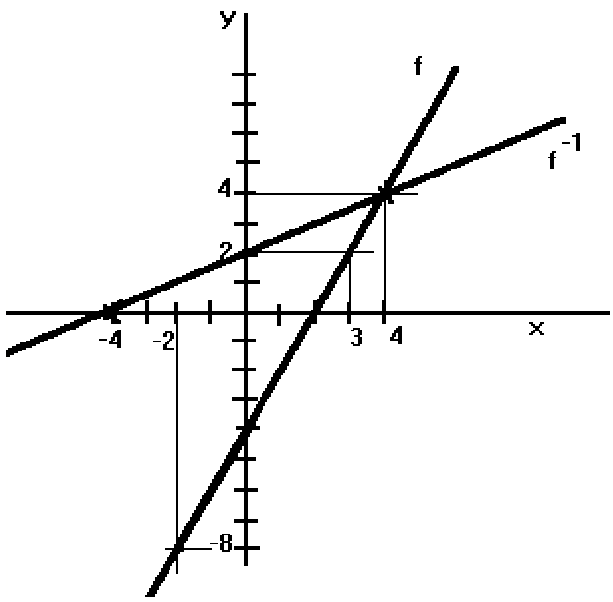
Příklad:
Je dna funkce f: y = 2x - 4 , najděte k ní funkci inverzní.

Řešení:
V daném funkčním předpise nejprve zaměníme x a y : $\quad x = 2y - 4$
Potom z rovnice vyjádříme y: $\quad x + 4 = 2y \quad / :2$
$y = 0{,}5\,x + 2$

f: $\quad y = 2x - 4$ $\qquad$ f^{-1}: $\quad y = 0{,}5\,x + 2$

x	-2	3
y	-8	2

x	-4	4
y	0	4



Na obrázku je vidět, že graf funkce f a funkce f^{-1}
jsou osově souměrné podle osy I. a III. kvadrantu.

Cvičení:

1. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $\quad$ f : y = 2x - 3
2. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $\quad$ f : y = -3x +6,5
3. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $\quad$ f : $y = \frac{5}{2x}$
4. K dané funkci nalezněte funkci inverzní: $\quad$ f: $y = -\frac{5}{x}$

Exponenciální rovnice

Jsou to rovnice, ve kterých se vyskytuje neznámá v exponentu mocniny.

Různé typy:

a) Typ $a^{x} = b$

Řeší se buď logaritmováním nebo pokud je to možné převedením na rovnost mocnin se stejným základem.

Příklad.

$4^{x} = 9$

logaritmováním: $x \log 4 = \log 9$

$x = \dfrac{\log 9}{\log 4} = 1{,}584$ (Výpočet dekadických logaritmů proveden na kalkulačce)

Příklad.

$3^x = 9 \longrightarrow 3^x = 3^2 \longrightarrow \underline{x = 2}$

b) Typ $\mathbf{a^{f(x)} = b^{g(x)}}$

Řeší se buď logaritmováním nebo převedením na rovnost dvou mocnin se stejným základem.

Příklad:

$5^{1-x} = 7^{x-1}$

Řešení: $(1 - x) .\log 5 = (x - 1) \log 7$

$\log 5 - x \log 5 = x \log 7 - \log 7$

$\log 5 + \log 7 = x (\log 7 + \log 5) /: ( )$

$\underline{x = 1}$

Příklad:

$5^{1-x} = 25^{x+1}$

Řešení:

$5^{1-x} = 5^{2(x+1)}$

$1-x = 2x + 2$

$-1 = 3x$

$x = -\dfrac{1}{3}$

c) Typ , kde se vyskytuje více mocnin v součtech nebo rozdílech.

Řeší se substitucí nebo zlogaritmováním

Příklad:

$3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^{x+1} = 57$

Řešení:

$3^{x-1} + 3^{x+2} - 3^{x+1} = 57$ nejprve upravíme exponenty na stejný typ

$\dfrac{3^x}{3} + 3^2 3^x - 3.3^x = 57$

$3^x + 27.3^x - 9.3^x = 171$

$Substituce: 3^x = y$

$y + 27y - 9y = 171$

$19y = 171/:19$

$y = 9$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$\underline{\underline{x = 2}}$

Příklad:

$$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 2^{x+1} = 6$$

Řešení:

$$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 2^{x+1} = 6$$

$$\frac{2^{2x}}{2} + 2^2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 6$$

$$2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 12$$

$$\left(2^x\right)^2 + 4 \cdot 2^x - 12 = 0$$

Substituce: $2^x = y$

$y^2 + 4y - 12 = 0$

$(y+6).(y-2) = 0$

$y_1 = -6$ $\qquad$ $y_2 = 2$

$2^x = -6$ $\qquad$ $2^x = 2$

neřeš. $\qquad$ $\underline{x = 2}$

-

Příklad:

$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$

$4^x - 4^{x+3} = - 3^{x+2} - 3^{x+4}$ /. (-1)

$4^{x+3} - 4^x = 3^{x+2} + 3^{x+4}$

$4^x .4^3 - 4^x = 3^x .3^2 + 3^x .3^4$

$4^x (4^3 - 1) = 3^x (3^2 + 3^4)$

$4^x .63 = 3^x .90$ /: 9

$7 .4^x = 10 .3^x$

$$\frac{7}{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

$\log 0{,}7 = x . \log 0{,}75$

$$x = \frac{\log 0{,}7}{\log 0{,}75}$$

$x = \underline{1{,}24}$

Exponenciální rovnice - cvičení

1.) $2^{2x-4} = 2^{5-x}$	[3]
2.) $2^{x} = 32 – 2^{x}$	[4]
3.) $6^{x-1} = 5 + 6^{x-2}$	[2]
4.) $5^{x+2}. 2 – 5^{x+1} = 45$	[0]
5.) $5^{x} – 5^{x} . 5 + 500 = 0$	[3]
6.) $4^{x+1} + 4^{x} = 320$	[3]
7.) $5^{2x} – 3. 5^{x} = 10$	[1]
8.) $5^{x} + 3. 5^{x-2} = 140$	[3]
9.) $2. 3^{x+1} - 4. 3^{x-2} = 450$	[4]
10.) $5^{x} - 5^{3-x} = 20$	[2]
11.) $5^{2x-3} = 2. 5^{x-2} + 3$	[25]
12.) $3^{2x-1} - 3^{2x-4} = 315 - 3^{2x-2}$	[3]
13.) $49^{x} - 6. 7^{x} + 5 = 0$	[0 ; 0,83]
14.) $16^{x} = 6. 4^{x} – 8$	[1; 0,5]
15.) $121^{x} = 22 + 9. 11^{x}$	[1]
16.) $3^{2x+1} – 3. 3^{x+2} = 3^{x} – 9$	[-1; 2]
17.) $4^{x} + 7 . 2^{x-2} = 0,5$	[-2]
18.) $9^{x-1} + 7 = 4 (3^{x-1} +1)$	[9 , 3]
19.) $2^{3x} . 4^{3x-3} = 8^{2x+1}$	[3]
20.) $5^{2x} - 7^{x} - 35. 5^{2x} + 35. 7^{x} = 0$	[0]
21.) $3^{2x-1} + 3^{x} - 3^{0} = 3^{-1}$	[0]
22.) $4^{x+1} - 8. 4^{x-1} = 32$	[2]
23.) $5^{x} + 1 - 3. 5^{x} = - 49$	[2]
24.) $4. 3^{x+1} - 3^{x-1} = 315$	[3]
25.) $5. 4^{x+1} - 4^{x+2} = 4^{x-1} + 240$	[3]
26.) $25^{2x} - 3. 25^{x} = 10$	[0,5]
27.) $5. 2^{x+2} - 6. 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2. 2^{x+1}$	[- 4]
28.) $4^{x} - 10. 2^{x-1} = 24$	[3]
29.) $11^{3x-2} + 13^{3x-2} = 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$	$\left[\frac{2}{3}\right]$
30.) $3. 3^{x} + 4. 3^{x+1} + 5. 3^{x+2} = 405. 2^{x-1}$	[3]
31.) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$	[9]
32.) $4. 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$	[3]
33.) $3. (9^{2x+1}) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$	$\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right]$