4

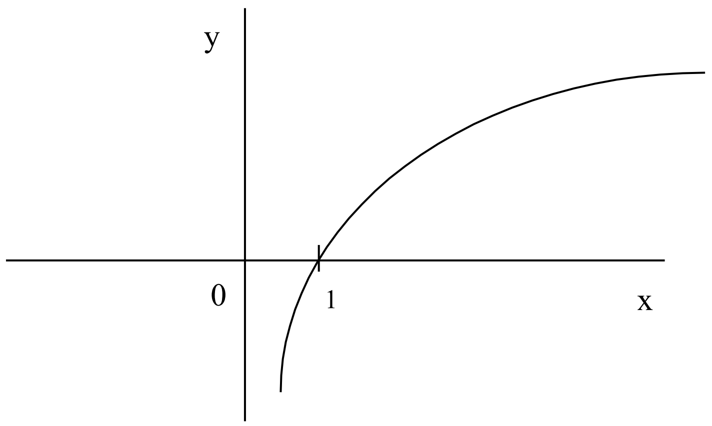
Logaritmická funkce, logaritmus, logaritmická rovnice

Logaritmická funkce.

- získá se jako funkce inverzní k funkci exponenciální, má tvar f: $y = \log_a x$ Platí: $x > 0$!!

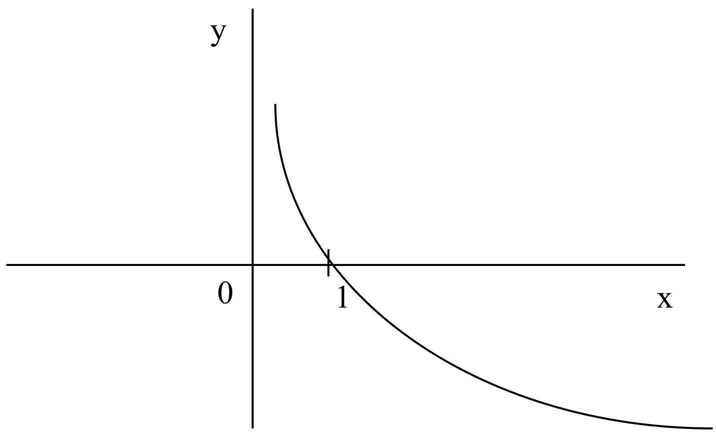
* * $\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$ musí být $x > 0$, $a > 0$

Rozlišujeme dva základní typy:
a) $a > 1$



Funkce má definiční obor $(0, \infty)$ a v celém definičním oboru je rostoucí. Prochází vždy bodem $[1,0]$.

b) $0 < a < 1$



Funkce má definiční obor $(0, \infty)$ a v celém definičním oboru je klesající. Prochází vždy bodem $[1,0]$.

Příklad:

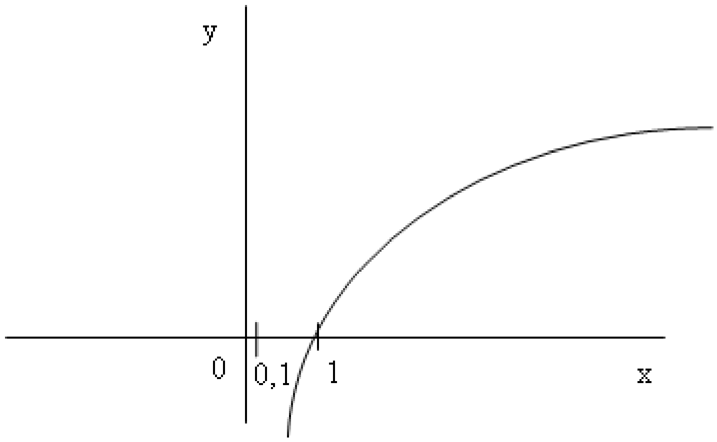
Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_5 0{,}1$???? 0

Řešení:

Protože $a = 5$, funkce je rostoucí .

Protože funkční hodnota v bodě 0,1 je v záporné části osy y , je

$$\log_5 0{,}1 \quad < \quad 0$$



<u>Příklad:</u>

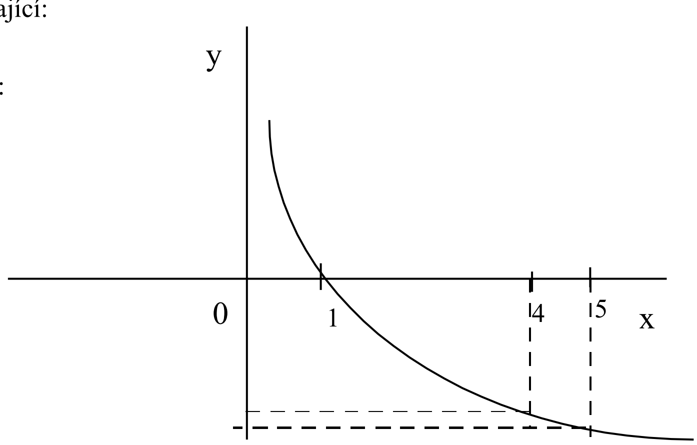
Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0,1} 4 \quad ???? \quad \log_{0,1} 5$

<u>Řešení:</u>

Protože *a* <1, je funkce klesající:

Na obrázku je vidět, že platí:

$$\log_{0,1} 4 \quad \succ \quad \log_{0,1} 5$$



<u>Cvičení:</u>

1.) Je dána funkce y = $\log_3 x$. Doplňte tabulku:

x	1	$\frac{1}{3}$	9			
y				1	-2	$\frac{1}{2}$

2.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0,4} 3 \quad ???? \quad 0$

[<]

3.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_3 2 \quad ???? \quad 0$

[>]

4.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0,1} 0{,}2 \quad ???? \quad 0$

[>]

5.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{10} 4$???? 0

[>]

6.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{10} 0{,}1$???? 0

[<]

7.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{2} 0{,}3$???? $\log_{2} 0{,}4$

[<]

8.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}1} 0{,}7$???? 0

[>]

9.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{4} 0{,}4$???? 0

[<]

10.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}4} 4$???? 0

[<]

11.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{2} 5$???? $\log_{2} 3$

[>]

12.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{8} 12$???? $\log_{8} 11$

[>]

13.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{7} 8$???? 0

[>]

14.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}1} 8$???? $\log_{0{,}1} 9$

[>]

15.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{2} 0{,}3$???? 0

[<]

16.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}2} 10$???? $\log_{0{,}2} 100$

[>]

17.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{10} 0{,}1$???? $\log_{10} 0{,}2$

[<]

18.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{10} 7$???? 0

[>]

19.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}2} 0{,}7$???? 0

[>]

20.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}4} 1$???? 0

[=]

21.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}4} 2$???? 0

[<]

22.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{4} 0{,}2$???? 0

[<]

23.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0{,}4} 42$???? $\log_{0{,}4} 24$

[<]

24.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{4} 0{,}42$???? $\log_{4} 0{,}24$

[>]

25.) Doplňte znaménko nerovnosti a odůvodněte: $\log_{0,7} 3 \quad ???? \quad 0$

[<]

L o g a r i t m u s

Definice:
Logaritmus kladného čísla x při základu a je číslo y, kterým daný základ a musíme umocnit, abychom dostali číslo x.

$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$ musí být $x > 0$, $a > 0$

Příklad :
1.) $\log_5 25 = 2$ protože $5^2 = 25$
2.) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ protože $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
3.) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ protože $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Platí : ! $\log_a 1 = 0$!

Cvičení:
1.) Určete: a) $\log_3 27$ b) $\log_4 64$ c) $\log_2 64$ d) $\log_8 64$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 1$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ g) $\log_a a$ h) $\log_a \sqrt{a}$

2.)Určete základy logaritmů:
a) $\log_x 625 = 2$ b) $\log_x 625 = 4$ c) $\log_x 16 = -2$ d) $\log_x 16 = -4$ e) $\log_x 16 = \frac{1}{2}$ f) $\log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Pravidla pro počítání s logaritmy

- **1.) $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$**

Logaritmus součinu se rovná součtu logaritmů jednotlivých činitelů

Příklad:
a) $\log_a 2 = \log_a 2 + \log_a$
b) $\log_a x^3y = \log_a x^3 + \log_a x^3 + \log_a y$

- **2.) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$**

Logaritmus podílu se rovná logaritmus dělence minus logaritmus dělitele.

Příklad : a) $\log_a \frac{x^2}{2y} = \log_a x^2 - \log_a 2y$
b) $\log_a \frac{100}{2} = \log_a 100 - \log_a 2$

- **3.) $\log_a x^n = n.\log_a x$**

Mocninu logaritmujeme, když exponent násobíme logaritmem základu mocniny.

Příklad:

a) $\log_a 10^2 = 2.\log_a 10$

b) $\log_a x^3 = 3.\log_a x$

- **4.)** $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$

Odmocninu logaritmujeme, když logaritmus odmocněnce dělíme odmocnitelem.

Příklad:

a) $\log_a \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}.\log_a 10$

b) $\log_a \sqrt[7]{a} = \frac{1}{7}.\log_a a$

Řešené příklady:

1) Logaritmujeme:

a) $\sqrt[4]{c^3}$

$$\Rightarrow \log_a \sqrt[4]{c^3} = \frac{1}{4}.\log_a c^3 = \frac{3}{4}\log_a c$$

b) $\frac{\sqrt{x}}{by}$

$$\Rightarrow \log_a \frac{\sqrt{x}}{by} = \log_a \sqrt{x} - \log_a by = \frac{1}{2}\log_a x - \log_a b - \log_a y$$

$c)\frac{2}{gh}$

$$\Rightarrow \log_a \frac{2}{gh} = \log_a 2 - (\log_a g.h) = \log_a 2 - (\log_a g + \log_a h) = \log_a 2 - \log_a g - \log_a b$$

$d)\sqrt{dx^2y}$

$$\Rightarrow \log\sqrt{dx^2y} = \frac{1}{2}\log_a dx^2y = \frac{1}{2}\left(\log_a d + \log_a x^2 + \log_a y\right) = \frac{1}{2}\left(\log_a d + 2\log_a x + \log_a y\right)$$

2) Určete výraz, jehož logaritmováním jsme dostali: (odlogaritmujte)

$$a)\log_a c - \log_a 2 - \log_a b = \log_a \frac{c}{2} - \log_a b = \log_a \frac{\frac{c}{2}}{b} = \log_a \frac{c}{2b}$$

$$b)\log_a(a+3) - \log_a(a-3) = \log_a \frac{(a+3)}{(a-3)}$$

Dekadický logaritmus: $\log_{10} x = \log x$

Přirozený logaritmus: $\log_e x = \ln x$

e = 2,71 (Eulerova konstanta)

Logaritmické rovnice

= rovnice, kde neznámá se vyskytuje v argumentu logaritmu

Každé řešení by mělo být doplněno o podmínky tak, aby logaritmy neměly záporné argumenty.

Typy logaritmických rovnic

1) Rovnice, kde se vyskytují logaritmy s různými argumenty

a) Řešíme buď převodem na logaritmy se stejnými argumenty a dále substitucí (logaritmus je možno nahradit jinou proměnnou)

b) Řešíme převodem na rovnost 2 logaritmů a dále porovnáváme argumenty

Příklad:

$$5.\log x^3 - 4.\log x^6 + \frac{1}{2}\log x^8 = 9 - \log x^6$$

Řešení: Pod: $x > 0$

$$5.\log x^3 - 4.\log x^6 + \frac{1}{2}\log x^8 = 9 - \log x^6$$

rovnici nejprve upravíme podle pravidel pro logaritmování na tvar

$$5.3.\log x - 4.6.\log x + \frac{1}{2}.8.\log x = 9 - 6.\log x$$ dále použijeme substituci $\log x = y$

$15y - 24y + 4y = 9 - 6y$

$\underline{\underline{y = 9}}$

Příklad:

$\log x + \log(x + 1) = \log 2x$

Řešení: Pod: $x > 0$

rovnici nejprve upravíme podle pravidel pro logaritmování na tvar

$\log x.(x + 1) = \log 2x$

$x.(x + 1) = 2x$

$x^2 + x - 2x = 0$

$x^2 - x = 0$

$x.(x - 1) = 0$

$\cancel{x_1 = 0}$ $x_2 = 1$

První kořen nemůže být kořenem rovnice, protože argument logaritmu musí být číslo větší než 0.

Příklad:

$$\log(3x + 4) - \log(7x - 3) = 1 + \log\frac{11}{10}$$

Řešení: Pod: $x > \frac{3}{7}$

$$\log(3x + 4) - \log(7x - 3) = 1 + \log\frac{11}{10}$$

$\log(3x+4) = \log(7x-3) + \log 11 - \log 10 + 1$ číslo 1 musíme také nahradit logaritmem:

$\log_{10} y = 1$?

$y = 10^1 \qquad y = 10$

$\log(3x+4) = \log(7x-3) + \log 11 - \log 10 + \log 10$

$\log(3x+4) = \log(7x-3)\cdot 11$

$(3x+4) = (7x-3)\cdot 11$

$(3x+4) = (77x-33)$

$37 = 74x \qquad x = \frac{1}{2}$

Zkouška:

L = $\log\left(3\cdot\frac{1}{2}+4\right) - \log\left(7\cdot\frac{1}{2}-3\right) = \log 5{,}5 - \log 0{,}5 = \log\frac{55}{5} = \log 11$

P = $1 + \log\frac{11}{10} = \log 10 + \log\frac{11}{10} = \log 10.\frac{11}{10} = \log 11$ L = P

2) Rovnice kde se vyskytují logaritmy se stejnými argumenty - řešíme vždy substitucí.

Příklad:

$$\log x - \frac{3}{\log x} = 2$$

Řešení: Pod: x > 0

Substituce: $\log x = y$

$y - \frac{3}{y} = 2 \quad /.y$

$y^2 - 3 = 2y$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y+1)(y-3) = 0$

$y_1 = -1 \qquad y_2 = 3$

$\log x = -1 \qquad \log x = 3$

$x = 10^{-1} \qquad x = 10^3$

$x_1 = 0{,}1 \qquad x_2 = 1000$

Cvičení:

1.) $\frac{5\log x + 3}{3\log x - 4} = \frac{\log x + 5}{3\log x - 4} - 2$ $[10]$

2.) $\frac{1}{4\log + 7} + 1 = \frac{36 - 2\log x}{8\log x + 14}$ $[100]$

3.) $\frac{\log x - \frac{1}{4}}{1 - \log x} = \frac{1}{2}$ $[\sqrt{10}]$

4.) $\frac{\log(x^2+5)}{2\log(x-3)} = 1$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

5.) $\log x + \dfrac{3}{\log x} = 4$ $[10,1000]$

6.) $\log_3 x^2 - \log_3 x^4 + \log_3 x^3 = -3$ $[\frac{1}{27}]$

7.) $\dfrac{\log(2x+10)}{2} = \log(x+1)$ $[3]$

8.) $\dfrac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$ $[6]$

9.) $\log_6 z - 1 = \log_6(z-1)$ $[\frac{6}{5}]$

10.) $1 + \log_8 x = \log_8(5-x) + 3\log_8 x$ [NŘ]

11.) $-2.\log_{0,5}(4-x) = 3 - \log_{0,5}(10-x)$ [5]

12.) $\log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-1} = 2 - \log 2$ $[\sqrt{2501}]$

13.) $\dfrac{\log\frac{5}{3}(x-2)}{\log(x-2)} = 2$ $\left[\frac{11}{3}\right]$

14.) $\log\sqrt{x^2-4} - \log\sqrt{x+2} = \log 5$ $[27]$

15.) $\log 15x^2 + \log 0{,}6x = \log 81^2$ $[9]$

16.) $\log(2x+9) - 2\log x + \log(x-4) = 2 - \log 50$ $[36]$

17.) $\dfrac{\log x}{1-\log 2} = 2$ $[25]$

18.) $\log\left(\dfrac{1}{2}+x\right) = \log\dfrac{1}{2} - \log x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

19.) $\log_8\sqrt{3-x} + \log_8\sqrt{2x+18} = 1$ $[-1,-5]$

20.) $\log(3x-4)^2 + \log(7x-9)^2 = 2$ $\left[2,\frac{13}{21}\right]$