5

Nerovnice se zlomky, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Lineární nerovnice

= zápis tvaru $l(x) < p(x)$ nebo
$l(x) > p(x)$
$l(x) \leq p(x)$
$l(x) \geq p(x)$

kde l (x) je levá strana nerovnice a p (x) je pravá strana nerovnice

např. $x + 5 > 4$

Při úpravách nerovnice můžeme postupovat těmito způsoby:

1) k oběma stranám přičteme totéž číslo nebo výraz
2) od obou stran odečteme totéž číslo nebo výraz
3) převedeme člen z jedné strany na druhou s opačným znaménkem
4) násobíme (nebo dělíme) obě strany rovnice kladným číslem
5) násobíme (nebo dělíme) obě strany rovnice záporným číslem a zároveň otočíme znaménko nerovnosti

Příklad:

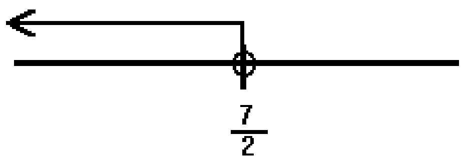
Řešte nerovnost $3x - 5 < x + 2$

Řešení:

na jednu stranu nerovnice (levou) převádíme členy s x, na druhou stranu ostatní:

$$3x - x < 2 + 5$$
$$2x < 7 \;/ : 2$$
$$x < \frac{7}{2}$$

Výslednou nerovnost můžeme zobrazit:



$$P_x = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$$

Příklad:

Řešte nerovnici $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > \frac{1}{6} + x$

Řešení:

Celou rovnici násobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů číslem 6 :

$$2x - 3 > 1 + 6x$$

Členy s x převedeme na levou stranu rovnice, ostatní na pravou:

$$2x - 6x > 1 + 3$$
$$-4x > 4 \;/ : (-4) \quad \text{(otočit znaménko nerovnosti)}$$
$$x < -1 \qquad P_x = (-\infty, -1)$$

Cvičení:

Řešte nerovnice:

1.) $\frac{2y + 6}{2} < \frac{3y - 1}{3}$ [nemá řešení]

2.) $\frac{5x + 1}{2} > \frac{10x - 5}{3} - \frac{5x - 1}{6}$ [nerovnost splněna pro každé x]

3.) $\left(3x-5\right)^2+\left(4x-3\right)^2\geq\left(5x-4\right)^2$ [$\left(-\infty,\frac{9}{7}\right\rangle$]

4.) $2\left(x-3\right)\prec x-1$ [$\left(-\infty,5\right)$]

5.) $\frac{4x}{3}\leq\frac{2}{3}+x$ [$\left(-\infty,2\right\rangle$]

6.) $2-\frac{x+2}{3}\succ x-\frac{x+3}{3}$ [$\left(-\infty,\frac{7}{3}\right)$]

7.) $6x+1\succ2\left(x-5\right)-1$ [$\left(-2,\infty\right)$]

8.) $4x-3\prec5-2x$ [$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$]

9.) $\frac{2x-3}{12}+\frac{3-x}{16}\prec0$ [$\left(-\infty,\frac{3}{5}\right)$]

10.) $y-\frac{5y-3}{8}\succ\frac{3y+5}{8}$ [nemá řešení]

Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

Např: $\frac{4-x}{2x-3}\succ0$

Tyto nerovnice nemůžeme pouze násobit jmenovatelem, protože nemůžeme jednoznačně určit, zda je kladný nebo záporný.

Nejvýhodnější je postupovat podle následujícího příkladu :

Příklad:

Řešte nerovnici: $\frac{x+3}{x-2}\prec-2$

Řešení: Rovnici upravíme tak , aby na pravé straně byla 0:

$$\frac{x+3}{x-2}+2\prec0$$

Levou stranu upravíme tak , aby obsahovala jediný zlomek
(dáme na společného jmenovatele):

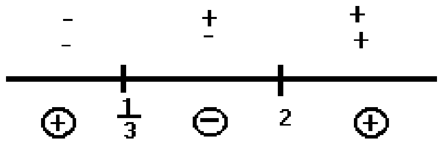
$$\frac{x+3}{x-2}+\frac{2(x-2)}{(x-2)}\prec0$$

$$\frac{x+3+2x-4}{x-2}\prec0$$

$$\frac{3x-1}{x-2}\prec0$$

Zajímá nás, kdy je tento zlomek záporný ($\prec 0$). Určíme nulové body čitatele a jmenovatele a zobrazíme na číselnou osu:

Určíme , jaká znaménka má čitatel a jmenovatel v takto vzniklých intervalech:



- podíl dvou kladných nebo dvou záporných čísel je číslo kladné
- podíl kladného a záporného čísla je číslo záporné

My jsme hledali, kdy je daný zlomek záporný - tedy v intervalu **-** : $\left(\frac{1}{3},2\right)$

$$P_x = \left(\frac{1}{3},2\right)$$

<u>Příklad :</u>

Řešte rovnici : $\frac{3x-1}{x+4} \geq 2$

<u>Řešení :</u>
Převedeme číslo 2 na levou stranu rovnice :

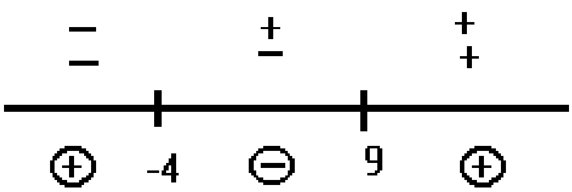
$$\frac{3x-1}{x+4} - 2 \geq 0$$

Dáme na společného jmenovatele : $\frac{3x-1}{x+4} - \frac{2(x+4)}{(x+4)} \geq 0$

$$\frac{3x-1-2x-8}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{x-9}{x+4} \geq 0$$

Určíme nulové body čitatele a jmenovatele a znamínka v jednotlivých intervalech :



Tentokrát jsme hledali, kdy je zlomek ≥ 0 - tedy kladný nebo 0. Zbývá určit , zda do řešení patří i nulové body:

č. (-4) nemůže být řešením $\rightarrow$ nesmí být ve jmenovateli 0

č. 9 může být řešením, celý zlomek by měl hodnotu 0 a rovnost nule připouštíme

Px = $(-\infty,-4) \cup \langle 9,\infty)$

Cvičení :
Řešte nerovnice :

11.) $\frac{4-2x}{1+3x} < 0$ $\left[\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)\right]$

12.) $\frac{3y+7}{2-6y} < 0$ $\left[\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right) \cup (2, \infty)\right]$

13.) $\frac{5-2x}{8+5x} < 1$ $\left[\left(-\infty, -\frac{8}{5}\right) \cup \left(-\frac{7}{3}, \infty\right)\right]$

14.) $\frac{9-2x}{4x+1} > 2$ $\left[\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{10}\right)\right]$

15.) $\frac{2x-1}{3-x} \leq 2$ $\left[\left(-\infty, \frac{7}{4}\right\rangle \cup (3, \infty)\right]$

16.) $\frac{x^2-7x+12}{x^2+3x+2} \leq 0$

17.) $\frac{x^2+3x-40}{x^2-4} \geq 0$

18.) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x-7} \succ 0$

19.) $\frac{2x^2-2x-12}{x^2+6x+5} \geq 0$ $\left[(-\infty, -5) \cup \langle -2, -1) \cup \langle 3, \infty)\right]$

20.) $\frac{-x+2}{2x-3} \prec -1$ $\left[\left(1, \frac{3}{2}\right)\right]$

Nerovnice s absolutní hodnotou

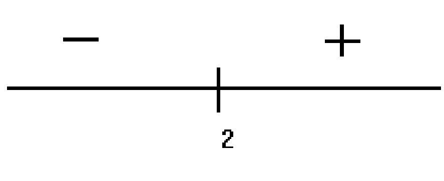
Řešení nerovnic s absolutní hodnotou je ukázáno na příkladě.

Příklad:

$|x-2| \leq 5$

Řešení:

Zobrazíme nulový bod absolutní hodnoty, číselná osa se rozdělí na intervaly, určíme znaménko absolutní hodnoty v jednotlivých intervalech:



Dále řešíme zvlášť v každém intervalu:

Tam , kde má absolutní hodnota znaménko - , změníme znaménka všech členů uvnitř abs. hodnoty a nahradíme ji závorkou ; tam , kde má absolutní hodnota znaménko + , ponecháme vnitřek bez změn a nahradíme ji závorkou.

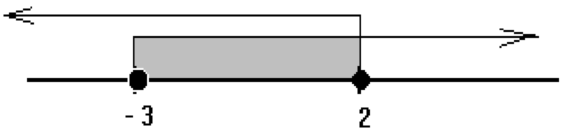
a) **x ∈ (-∞ , 2 >**

$-x + 2 \leq 5$

$-x \leq 3$

$x \geq -3$

Výsledek zobrazíme:

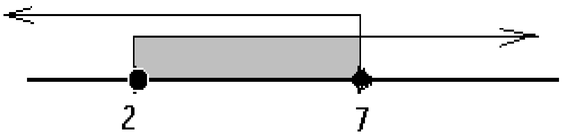


a) **x ∈ <2 , ∞)**

$x - 2 \leq 5$

$x \leq 7$

Výsledek zobrazíme:



<u>Celkem:</u>

x ∈ <-3 , 7 >

<u>Cvičení:</u>

Řešte nerovnice

1.) $|x-2| \prec 2$

[(1 , 5)]

2.) $|x-5| - 2|x+1| \succ |x-3| + 1$

[$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$]

3.) $|x| - 5 \succ 3x$

[$\left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$]

4.) $|x-3| \prec 2x + 1$

[$\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$]

5.) $|x+4| \geq |x-3|$

[$\langle -12; \infty)$]

6.) $|x+1| - |2x+3| \prec 0$

[$(-\infty, -2)$]

7.) $3|x-7| + 2 \leq x - 2 + 2|x+5|$

[-4;2]

8.) $\frac{|x-6|}{2} - \frac{x-4}{6} \geq x - \frac{x+1}{3}$

[$(-\infty; 3\rangle$]

9.) $5 - |2x-1| + \frac{x+2}{3} \succ 2|x+1|$

[$\left(-\frac{20}{13}; \frac{14}{11}\right)$]

10.) $2|x| - \frac{2x-1}{3} \leq 3|x+2|$

[$(-\infty; -19\rangle \cup \langle -1; \infty)$]

11.) $|x-3|+|12-x| \geq x$

$[(-\infty;9\rangle \cup \langle 15;\infty)]$

12.) $|x^2-5x+4| \geq x(x-1)$

$[(-\infty;2\rangle]$

13.) $\left|\dfrac{x+3}{x-4}\right| \succ 2$

14.) $|x|-|x-5| \geq 4(x-3)$ $[(-\infty;3{,}5\rangle]$

15.) $|x+3| \succ |x-2|$ $[(-0{,}5;\infty)]$

16.) $\dfrac{2x-3}{6}-\dfrac{x+5}{3} \geq \dfrac{|4-x|}{2}$ [nemá řeš.]

17.) $\dfrac{|3-5x|}{x-2} \succ 6$ [(2 , 9)]

18.) $\dfrac{3}{|x+1|} \geq 1$ $[\langle -4{,}2\rangle - \{-1\}]$

19.) $|x|+|x+1| \succ 1$ $[(-\infty,0) \cup (1,\infty)]$

20.) $|x|+|x-2| \leq 2$ [<0 , 2 >]

21.) $|2x-3| \geq |3x-2|$ [<-1 , 1 >]

22.) $|x| \leq |x+1|$ $[\langle -0{,}5;\infty)]$

23.) $2|x+1|-|x|+4|x-1| \leq 2x+1$ [1]

Rovnice s absolutní hodnotou:

Při řešení postupujeme podle následujícího příkladu:

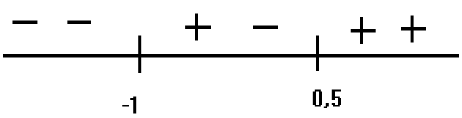
Příklad:

$|x+1|+|2x-1| = 3$

Řešení :

Nejprve určíme nulové body a bsolutních hodnot : $-1\ ,\ \dfrac{1}{2}$

a zobrazíme je na číselnou osu:



Číselná osa se nulovými body rozdělí na intervaly, určíme, jaká znaménka mají jednotlivé abs. hodnoty v těchto intervalech.

Dále řešíme rovnice zvlášť v každém intervalu. Tam kde má absolutní hodnota znaménko **–** , otočíme znaménka všech členů uvnitř absolutní hodnoty a absolutní hodnotu nahradíme závorkou, tam kde má absolutní hodnota znaménko $+$, absolutní hodnotu nahradíme závorkou a členy uvnitř ponecháme bez změny:

a) $(-\infty,-1\rangle$

(-x - 1) + (-2x + 1) = 3

- 3x = 3

x = -1

Pro každý vypočtený kořen musíme ještě ověřit, zda je to číslo z daného intervalu.

b) $\left\langle -1,\dfrac{1}{2}\right\rangle$ c) $\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right)$

$(x + 1) + (-2x + 1) = 3$ $\qquad\qquad$ $(x + 1) + (2x - 1) = 3$

$-x + 2 = 3$ $\qquad\qquad$ $3x = 3$

$\underline{x = -1}$ $\qquad\qquad$ $\underline{x = 1}$

Rovnice má dva kořeny : $\underline{\underline{x_1 = -1 , x_2 = 1}}$

Zkouška:

$\underline{\underline{x_1 = -1}}$ $\qquad L = |x+1| + |2x-1| = |-1+1| + |-2-1| = |-3| = 3 \qquad P = 3 \qquad L = P$

$\underline{\underline{x_2 = 1}}$ $\qquad L = |x+1| + |2x-1| = |1+1| + |2-1| = |2| + |1| = 3 \qquad P = 3 \qquad L = P$

Cvičení

Řešte rovnice:

1.)	$\lvert x-5\rvert = 2$	[3; 7]
2.)	$\lvert 1-x\rvert = 8$	[-7; 9]
3.)	$\lvert 2x-3\rvert = 4$	[-0,5; 3,5]
4.)	$4 - 2\lvert 5-x\rvert = 0$	[3; 7]
5.)	$1 - \lvert x-3\rvert = x-2$	$\left[\left(-\infty, 3\right\rangle\right]$
6.)	$\lvert x+1\rvert - \lvert x-4\rvert = 5$	[$\left\langle 4;\infty\right)$]
7.)	$\lvert 2x-1\rvert - \lvert x+5\rvert = 1$	[$-\frac{5}{3};7$]
8.)	$x - 2\lvert x-1\rvert = 3\lvert x+2\rvert - 10$	[$-\frac{7}{3};\frac{3}{2}$]
9.)	$x - 2\lvert x-1\rvert = 3\lvert x+2\rvert - 8$	[$\left\langle -2,1\right\rangle$]
10.)	$x - 2\lvert x-1\rvert = 3\lvert x+2\rvert - 4$	[ϕ]
11.)	$\lvert x-5\rvert - \lvert x-2\rvert = \lvert x\rvert - x + 7$	$\left[\left\langle 2,\infty\right)\right]$
12.)	$\lvert x\rvert = \lvert 2x+3\rvert + x - 1$	$\left[\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right]$
13.)	$\lvert 3x-1\rvert - \lvert 2x+3\rvert = 0$	$\left[\left\{-\frac{2}{5},4\right\}\right]$
14.)	$\lvert x+3\rvert - \lvert x-4\rvert + 2\lvert x-6\rvert = 1$	[nemá řeš.]
15.)	$\lvert x+1\rvert + \lvert 2-x\rvert - \lvert x+3\rvert = 4$	$\left[\left\{-2,8\right\}\right]$
16.)	$x^2 + 1 = \lvert x^2 - 2x + 1\rvert$	$\left[\left\{0\right\}\right]$
17.)	$2\lvert x-3\rvert + \lvert 6-2x\rvert = \lvert x+7\rvert$	$\left[\left\{1,\right\}\right]$

18.) $|x+7|-|x-4|=|6-x|$ $[\{1\}]$

19.) $|2x+1|-|x+3|=2|1-x|-3$ $\left[\left\{-3,\frac{1}{3},\right\}\right]$

20.) $|2x-1|=x+6$ $\left[\left\{-\frac{5}{3},7\right\}\right]$

21.) $|2x+1|+|2x-1|=3$ $\left[\left\{\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right\}\right]$

22.) $|a-2|+|a+2|=2a+2$ [1]

23.) $3|x-1|+2|x-2|=|x+10|$ $\left[\left\{-\frac{1}{2},\frac{17}{4}\right\}\right]$

24.) $|y-3|+3|y-1|=2y+1$ $[\{3,5\}]$