7

Rozklad kvadratického trojčlenu, užití při řešení kvadratické nerovnice, iracionální rovnice

Rozklad kvadratického trojčlenu

Používá se zejména při krácení lomených výrazů nebo řešení nejjednodušších kvadratických rovnic.
Některé trojčleny je možno rozložit na tvar: $(x+m)(x+n)$

Roznásobíme-li závorky, získáme: $(x+m)(x+n) = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m+n)x + mn$

Odtud je vidět, že $b = m + n$

$c = m \cdot n$

Příklad:
Rozložme trojčlen $x^2 + 3x + 2$

Řešení:
Hledáme takovou dvojici čísel, která po vynásobení dává hodnotu 2 a při sečtení hodnotu 3.
Je to dvojice 1, 2

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

Příklad:
Rozložme trojčlen $x^2 - 5x + 6$

Řešení:
Protože lineární člen tohoto trojčlenu je záporný a absolutní člen je kladný, musí být obě hledaná čísla rozkladu záporná.

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Příklad:
Rozložme trojčlen $x^2 + 2x - 8$

Řešení:
Protože lineární člen tohoto trojčlenu je kladný a absolutní člen je záporný, musí být jedno hledané číslo rozkladu záporné a jedno kladné.

$x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$

Cvičení:
Rozložte trojčleny

1.) $x^2 - x - 6$
2.) $x^2 + 5x + 4$
3.) $x^2 + 7x + 12$
4.) $x^2 - 4x + 3$
5.) $x^2 - 4x - 12$
6.) $x^2 + 2x - 3$
7.) $x^2 - 7x + 10$
8.) $x^2 + 8x + 15$
9.) $x^2 - 28x + 75$
10.) $x^2 - 6x + 8$
11.) $x^2 + x - 12$
12.) $x^2 - 7x + 12$
13.) $x^2 - 5x - 6$
14.) $x^2 - 10x - 24$
15.) $x^2 + 6x - 16$
16.) $x^2 + 9x + 18$
17.) $x^2 - 18x - 40$
18.) $x^2 + 12x - 64$

Kvadratické nerovnice

Je to výroková forma v jednom z těchto tvarů:

$$ax^2 + bx + c \succ 0$$
$$ax^2 + bx + c \prec 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ , kde } a, b, c \in \mathrm{R} \text{ , } a \neq 0$$

Dovolené úpravy:

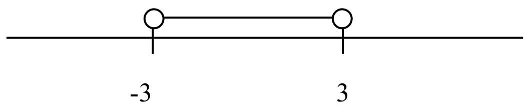
- nahrazení libovolné strany nerovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru nerovnice
- přičtení výrazu k oběma stranám nerovnice
- násobení obou stran nerovnice kladným výrazem
- násobení obou stran nerovnice záporným výrazem spolu s otočením znaménka nerovnosti
- umocnění obou stran nerovnice stejnou mocninou. Obě strany nerovnice musí nabývat pouze nezáporných hodnot.
- odmocnění obou stran nerovnice stejným odmocněncem. Obě strany nerovnice musí nabývat pouze nezáporných hodnot.

1.) Ryze kvadratická nerovnice

Je to nerovnice tvaru $x^2 - m \prec 0$ nebo $x^2 - m \succ 0$ nebo $x^2 + m \succ 0$ nebo $x^2 + m \prec 0$

Příklad:

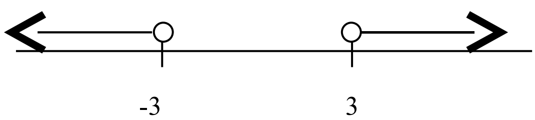
$x^2 - 9 \prec 0$ platí: $|x| \prec 3$



$x \in (-3,3)$

Příklad:

$x^2 - 9 \succ 0$ platí: $|x| \succ 3$



$x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

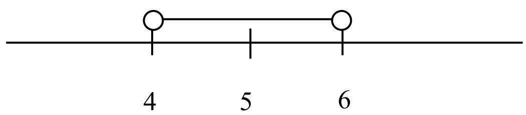
Příklad:

$x^2 + 9 \succ 0$ platí: $|x| \succ \sqrt{-9}$

Nemá řešení v R.

Příklad:

$(x-5)^2 \prec 1$ platí: $|x-5| \prec 1$



$x \in (4,6)$

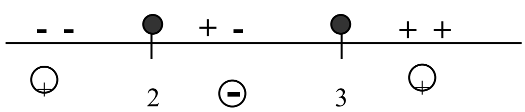
2.) Úplná kvadratická nerovnice

Úplnou KN se snažíme nejprve rozložit:

Příklad:

Nerovnici $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ rozložíme na tvar $(x-2)(x-3) \leq 0$

Zobrazíme na číselnou osu nulové body závorek:



$x \in \langle 2,3 \rangle$

Příklad:

Nerovnici $4x^2 + 16x + 5 \geq 0$ rozložíme pomocí diskriminantu:

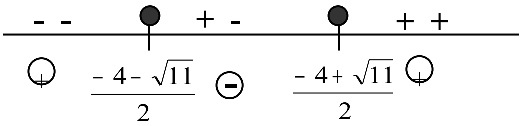
$$D = 256 - 80 = 176$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 4\sqrt{11}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\left(x - \frac{-4-\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{-4+\sqrt{11}}{2}\right) \geq 0$$

Zobrazíme na číselnou osu nulové body závorek:



$$x \in \left(-\infty, \frac{-4-\sqrt{11}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-4+\sqrt{11}}{2}, \infty\right)$$

Nelze-li KN rozložit, má buď řešení R , nebo ∅.

To poznáme tak, že zvolíme libovolné číslo, které do nerovnice dosadíme, je-li nerovnost splněna, je řešením R, není-li splněna, je řešením ∅.

Příklad:

$$x^2 - 2x + 7 \geq 0$$

Protože trojčlen nelze rozložit, vypočteme D:

$$D = 4 - 28 = -22$$

Diskriminant je záporný - nerovnici nelze rozložit.

Dosadíme libovolné číslo: x = 5

$$25 - 10 + 7 \geq 0$$

$$22 \geq 0$$

Tato nerovnost je pravdivá, x = R.

Při řešení kvadratických nerovnic je možno využít graf kvadratické funkce.

Cvičení:

1.) $x^2 + x - 2 \leq 0$

[$\langle -2;1\rangle$]

2.) $x^2 - 6x - 7 \prec 0$

[$(-1,7)$]

3.) $x^2 - 4x \succ 0$

[$(-\infty,0) \cup (4,\infty)$]

4.) $x^2 - 4x + 4 \prec 0$

[2]

5.) $x^2 - 2x + 9 \prec 0$

[R]

6.) $-x^2+x-3 \prec 0$

[ϕ]

7.) $3x^2-7x+4 \prec 0$

[$\left\langle 1;\frac{1}{4}\right\rangle$]

8.) $3x^2-7x+6 \prec 0$

[ϕ]

9.) $-4(3-x)^2 \geq 11x-33$

[$\left\langle \frac{1}{4};3\right\rangle$]

10.) $-x^2+5x+36 \prec 0$

[$(-\infty;-4\rangle \cup \langle 9;\infty)$]

11.) $10x^2-17x+3 \prec 0$

[$\left(-\infty;\frac{1}{5}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2};\infty\right)$]

12.) $\frac{3x-7}{x^2-2x-3}-1 \prec 0$

[$(-\infty,-1) \cup (1,3) \cup (4,\infty)$]

13.) $x^2-\frac{5}{6}x \leq \frac{7}{2}$

[$\left\langle -\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right\rangle$]

14.) $(2x-1)(x-10) \geq x(x-3)-62$

[$\left(-\infty;6\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2};\infty\right)$]

Rovnice s neznámou v odmocněnci (iracionální rovnice)

Postup řešení:

1) Pokud je v rovnici jen 1 odmocnina, úplně ji osamostatníme na jednu stranu rovnice a rovnici umocníme.

2) Pokud je v rovnici několik odmocnin, postup několikrát opakujeme.

Umocnění rovnic není ekvivalentní úprava, proto musíme vždy provádět zkoušku, která vyloučí některé kořeny.

Př: $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=9$

$\sqrt{x}=9-\sqrt{x+9} \qquad /^2$

$x=81-18\sqrt{x+9}+x+9$

$18\sqrt{x+9}=90 \qquad /:18$

$\sqrt{x+9}=5 \qquad /^2$

$x+9=25 \qquad x=16$

Zkouška: L = $\sqrt{16}+\sqrt{25}=4+5=9$

$P=9$ L =P **Px = { 16 }**

Iracionální rovnice - cvičení

1.)	$\sqrt{x-1}=5$	[26]
2.)	$\sqrt{x-1}=-5$	[ϕ]
3.)	$-\sqrt{x+3}=1$	[ϕ]
4.)	$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=0$	[ϕ]
5.)	$\sqrt{x-8}-\sqrt{3x-2}=0$	[ϕ]
6.)	$2=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}$	[1]
7.)	$\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}=-2$	[6]
8.)	$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$	[4]
9.)	$\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2-7}=0$	$[0,7]$
10.)	$\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{10}$	$[-5,5]$
11.)	$\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=4$	$[-4,4]$
12.)	$x+1=\sqrt{5x+1}$	$[0,3]$
13.)	$-\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x+2}=1$	$[7]$
14.)	$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=7$	$[11]$
15.)	$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=\dfrac{15}{\sqrt{x+4}}$	$[5]$
16.)	$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=4$	$\left[\dfrac{169}{64}\right]$
17.)	$\sqrt{2x}+1=\sqrt{13+2x}$	$[18]$
18.)	$\sqrt{x+27}=2+\sqrt{x-5}$	$[54]$
19.)	$\sqrt{9+x}-\sqrt{x-7}=2$	$[16]$
20.)	$\sqrt{x+5}=5-\sqrt{x}$	$[4]$
21.)	$3y+2=2\sqrt{6+5y}$	$[2]$
22.)	$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$	$[-1]$

23.) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

24.) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{4x+5}$ $[5]$

25.) $3\sqrt{2x-1}=2\sqrt{2x+1}$ $[1,3]$

26.) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ $[4]$

27.) $\sqrt{x+5}+1=x$ $[4]$

28.) $4\sqrt{x^2-1}=2x+2$ $\left[-1,\frac{5}{3}\right]$

29.) $\sqrt{x}-\frac{10}{\sqrt{x}}=-3$ [4]

30.) $\sqrt{3x-2\sqrt{5}}=\sqrt{x-1}-\sqrt{2x+1}$ [ϕ]

31.) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+7}=\frac{5}{\sqrt{x-3}}$ [$\frac{17}{4}$]

32.) $\sqrt{3+x-4\sqrt{1-x}}-\sqrt{x}=1$ [1]

33.) $\sqrt{6+x}-\sqrt{6}-x=\sqrt{2x}$ [0; 6]