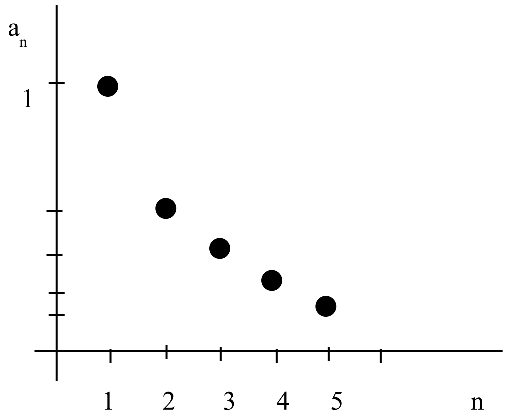
8

## *Aritmetická posloupnost, posloupnost rostoucí a klesající*

### *Posloupnosti*

Posloupnost je funkci s definičním oborem celých kladných čísel - např. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$

Jako funkci můžeme také posloupnost zobrazit do grafu:




Typy posloupností:

A) Konečné $\{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4\}$

B) Nekonečné $\{1,2,3,4,5,6,\ldots\ldots\ldots\}$

---

A) Rostoucí

pro každé dva sousední členy platí $a_n \prec a_{n+1}$

Např. $\{1,2,3,4,5,6,\ldots\ldots\ldots\}$

B) Klesající

pro každé dva sousední členy platí $a_n \succ a_{n+1}$

Např. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$

---

A) Posloupnost daná výčtem prvků

$\{1,2,3,4,5,6,\ldots\ldots\ldots\}$

B) Posloupnost daná vzorcem pro n-tý člen

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

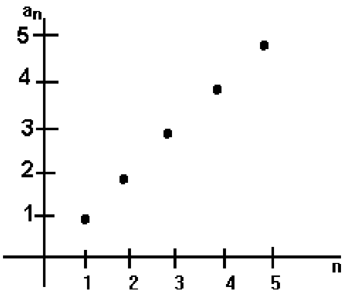
## Posloupnost rostoucí a klesající

a) rostoucí např. : $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

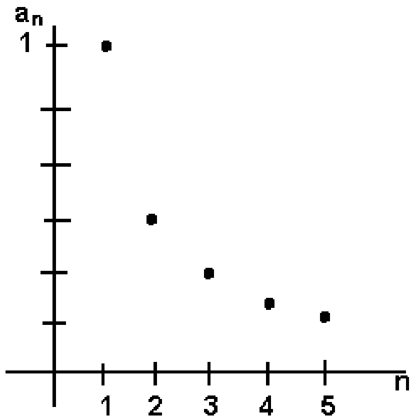
b) klesající např. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Jednotlivé členy posloupnosti můžeme zobrazovat jako body v rovině

$\left\{ n \right\}_{n=1}^{\infty}$




$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$




Zde je vidět růst a klesání posloupností.

Definice rostoucí posloupnosti:

jsou-li m, n$\in$ N, $a_n < a_m \Leftrightarrow n < m$

Definice klesající posloupnosti:

jsou-li m, n$\in$ N, $a_n > a_m \Leftrightarrow n < m$

Příklady:

1) Posloupnost $\left\{ n \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí ...... např. $a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$$(1 < 2) \wedge (1 < 2)$$

2) Posloupnost $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$$(1 < 2) \wedge \left(1 > \tfrac{1}{2}\right)$$

Příklad: Rozhodněte, zda posloupnost an $= \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí nebo klesající

Řešení: Budeme předpokládat, že posloupnost je klesající. Pro její dva členy

$a_n$ a $a_{n+1}$ by mělo platit $a_n > a_{n+1}$ .

$$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n+2} \quad \Big/ \cdot (n+1)(n+2)$$

$$n(n+2) > (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n > n^2 + 2n + 1$$
$$0 > 1 \quad \text{tato nerovnost není splněna}$$

Původní předpoklad byl nesprávný, posloupnost je rostoucí.

*Cvičení*

Rozhodněte , zda je rostoucí nebo klesající posloupnost:

1.) $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ K

2.) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ K

3.) $\left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ R

4.) $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ani R ani K

5.) $\left\{-\frac{1}{2}n\right\}_{n=1}^{\infty}$ K

6.) $\left\{2n\right\}_{n=1}^{\infty}$ R

7.) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ K

## Aritmetická posloupnost

= posloupnost čísel, kde 2 sousední členy se liší vždy o totéž číslo - diferenci **d**.

např. {2,5,8,11,14,17,....} posloupnost zadaná výčtem

V této posloupnosti je první člen $a_1 = 2$ , diference $d = 3$ ( sousední členy se liší vždy o 3 )

Platí : $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$ $\boldsymbol{d = a_{n+1} - a_n}$

### *Vzorec pro n-tý člen*

*Odvodíme na příkladě:*

Příklad:

Je dána aritmetická posloupnost, ve které platí: $a_1 = 1, d = 3$, určete desátý člen.

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + d = 1 + 3 = 4$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d = 1 + 6 = 7$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d = 1 + 9 = 10$

………

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 27 = 28$

*O*dvodili jsme vzorec pro n – tý člen: $\boldsymbol{a_n = a_1+(n-1)d}$

Pokud je posloupnost dána libovolnými dvěma členy $a_r$, $a_s$, pak platí vztah:

$$\boldsymbol{a_s = a_r+(s-r)d}$$

<u>Příklad:</u>

Je dána aritmetická posloupnost, ve které platí: $a_4 = -1,\ a_8 = 7$ Určete diferenci a dvacátý člen.

Použijeme vzorec $\boldsymbol{a_s = a_r+(s-r)d}$

$a_8 = a_4 + 4d$

$7 = -1 + 4d$

$\underline{d = 2}$

$a_{20} = a_8 + 12d$

$a_{20} = 7 + 12.2 = 7 + 24 \underline{= 31}$

## Součet n-členů aritmetické posloupnosti:

<u>Příklad:</u>

Určete součet všech přirozerných číse od 1 do 100.

<u>Řešení:</u>

Jedná se o aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 1, d = 1$.

Její součet napíšeme takto:

$$\begin{array}{rl} s_{100} = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100 \\ + \quad s_{100} = & 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95 + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2\,s_{100} = & \underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots + 101 + 101 + 101}_{100\,.\,101} \end{array}$$

$2\,s_{100} = 100\,.\,101$

$s_{100} = 50\,.\,101 = 5050$

Obecně platí: $s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$

<u>Příklad:</u>

V aritmetické posloupnosti je $a_2 = 6$ , $a_5 = 18$. Určete součet prvních dvaceti členů.

<u>Řešení:</u>

Pro dosazení do vzorce $s_{20} = \dfrac{20}{2}\left(a_1 + a_{20}\right)$ potřebujeme znát člen $a_{20}$. K jeho nalezení potřebujeme určit diferenci $d$.

Platí:

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$d = \frac{a_5 - a_2}{3} = \frac{18 - 6}{3} = 4 \qquad a_1 = a_2 - d = 6 - 4 = 2$$

Člen $a_{20}$: $a_{20} = a_5 + 15.d = 18 + 15.4 = 78$

Nyní můžeme určit $s_{20}$ : $s_{20} = 10\left(2 + 78\right) = 800$

Příklad:

Posloupnost zadaná pomocí n-tého členu: $\{4n-3\}_{n=1}^{\infty}$

má tyto členy $a_1$=1 ; $a_2$=5 ; $a_3$=9 ...... $d$=4

Důkaz , že se jedná o aritmetickou posloupnost:

člen $a_n = 4n - 3$

člen $a_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 4 - 3 = 4n + 1$

Mělo by platit: $a_{n+1} - a_n = d$

Po dosazení dostaneme: $4n + 1 - 4n - 3 = d$

$d = -2$

Dokázali jsme, že se jedná o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = -2$. Pokud by při řešení z rovnice nevypadlo $n$ , posloupnost by aritmetická nebyla.

Cvičení:

1. Najděte součet prvních 7 členů arimetické posloupnosti, víte-li, že 6. člen je (-6) a součet 2. a 5. členu je 3.

2. V aritmetické posloupnosti je člen $a_4$=3,4 ; $a_7$=5,8. Určete deferenci d ,$a_1$, $a_{10}$ a součet $s_{10}$.

3. Železné roury se skládají do vrstev tak, že roury každé vrstvy horní zapadají do mezer vrstvy dolní. Do kolika vrstev se složí 102 roury , má-li nejkratší vrstva 3 roury? Kolik rour má vrstva nejspodnější?

4. V aritmetické posloupnosti je $a_4 = 72$ , $a_8 = 128$ , kolik členů této posloupnosti dává součet 504?
   [ 7 ]

5. Jsou-li prvky $a_1$ , d , $a_n$ , n , $s_n$ prvky aritmetické posloupnosti, určete zbývající v případech že:
   a) $a_1 = 15$ ; $d = \frac{5}{3}$ ; $a_{13}$ = ? ; $s_{13}$ = ?
   b) $a_{20} = -66{,}5$ ; $d = -\frac{7}{2}$ ; $a_1$ = ? ; $s_{40}$ = ?
   c) $a_1 = -15$ ; $a_{12} = 21$ ; d = ? ; $s_{12}$ = ?
   d) $a_1 = 5$ ; $s_{15} = 0$ ; d = 0 ; $a_{15}$ = ?
   e) $a_n = 40$ ; $d = \frac{1}{2}$ ; $s_n$ = 1 007,5 ; n = ? ; $a_1$= ?
   [ a) 35;325 b) 0;-2730 c) $3\frac{3}{11}$;36 d) - $\frac{5}{7}$ ; -5 e) n = 31;130;$a_1$ = 25;-24,5 ]

6. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou strany dlouhé , je-li obsah trojúhelníku S = 6 $dm^2$?
   [ 3 ; 4 ; 5 ]

7. V aritmetické posloupnosti platí: $a_1 + a_5 = -8$ ; $a_2 + a_6 = -4$ . Napište prvních pět členů této posloupnosti.
   [ -8 ; -6 ; -4 ; -2 ; 0 ]

8. Určete $s_{10}$ v aritmetické posloupnosti ,ve které platí $a_2 + a_5 = 10$ ; $a_3 + a_7 = 16$ .
   [ 90 ]

9. Určete prvních šest členů posloupnosti, která je dána rekurentním vztahem a podmínkami:
   a) $a_1 = 1$ ; $a_{n+1} = a_n^2 - n - 1$
   b) $a_1 = 2$ ; $a_{n+1} = a_n^2 - n - 1$
   c) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ ; $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$
   [a)1,-1,-2,0,-5,19 ; b)2,2,1,-3,4,10 ; c)1,2,1,-1,-2,-1 ]

10. Rozhodněte, zda posloupnost s n- tým členem $a_n = \{n-50\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.
    [ ne ]

11. Zjistěte, zda čísla 77 , 127 jsou členy aritmetické posloupnosti kde $a_1 = -\frac{11}{7}$ , $a_2 = 0$.

[77 ano , 127 ne ]

12. Za vykopání studny bylo zaplaceno 208 Kč. Jak hluboká je studna, jestliže vykopání prvního metru stálo 12 Kč, a každý následující metr byl o 4 Kč dražší? Kolik stálo vykopání posledního metru?

[ hloubka n = 8 m , $a_8$ = 40 Kč ]

13. Turista ujde první den 40 km a každý další den o 3 km méně než den předcházející. Určete, kolik kilometrů ujde za týden.

[ 217 km ]

14. Určete součet všech přirozených čísel dělitelných třemi a menších než tisíc.

[ 166833 ]

15. Aritmetická posloupnost je určena prvním členem $a_1 = 3$ a diferencí d = 2. Kolik prvních členů této posloupnosti je třeba sečíst, aby součet byl 120?

[ 10 ]