9

Geometrická posloupnost a její užití, pravidelný růst a pokles, nekonečná geometrická řada

Geometrická posloupnost

Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Tuto posloupnost nazveme geometrická, jestliže pro každé dva po sobě následující členy platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$ kde q je reálné číslo , $q \neq 0$, $a_1 \neq 0$

neboli platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Příklad geometrické posloupnosti: { 2 , 4, 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , ...}
každý člen je dvojnásobkem členu předchozího
$a_1 = 2$, $q = 2$

Určení n - tého členu geometrické posloupnosti:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Dále platí tento vztah:

$$a_r = a_s . q^{r-s}$$

Vzorec pro součet n - členů geometrické posloupnosti:

1) $q \neq 1$ $$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2) $q = 1$ $$s_n = n \cdot a_1$$

Příklad:

V geometrické posloupnosti je $a_3 = 12$, $a_7 = -96$. Určete a_1 a q .

Řešení:

$a_7 = a_3 \cdot q^4$ odtud $q = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = \sqrt[3]{\frac{-96}{12}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$ odtud $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{12}{4} = 3$

Cvičení:

1. Určete součet prvních n členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:
   a) $a_1 = 2$, $q = -2$, $n = 5$ b) $a_1 = 16$, $q = 0{,}5$, $n = 6$
   c) $a_1 = -5$, $q = 1$, $n = 10$ d) $a_1 = -5$, $q = -1$, $n = 10$
   e) $a_1 = 0{,}75$, $q = 2/3$, $n = 8$ f) $a_1 = \sqrt{3}, q = \sqrt{2}, n = 6$

   [a)22 ; b)31,5 ; c)-50 ; d)0 ; e) $\frac{9}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^6$; f) $7.\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$]

2. Určete n - tý člen geometrické posloupnosti , jestliže platí $a_1 = 2$, $q = 3$, $s_n = 2186$.
   [$a_7 = 2.3^6$]

3. Zjistěte, která z čísel jsou členy geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 = 27$, $q = -\frac{2}{3}$.
4. Dokažte, že čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5} + \sqrt{2}$ jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.
5. Najděte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 = -2$; $a_2 = 4$.

[682]

Užití geometrické posloupnosti

1) Úlohy na složené úrokování:

Příklad:
Do peněžního ústavu vložíme částku $\mathbf{a_0}$. Vklad se každoročně úročí **p** procenty. Kolik budeme mít naspořeno po **n** letech?

Řešení:
vklad .... a_0

za 1 rok .... $a_1 = a_0 + a_0 . \frac{p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

za 2 roky .... $a_2 = a_1 + a_1 . \frac{p}{100} = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

•
•

po n letech ...... a_n

Máme určit n-tý člen geometrické posloupnosti s prvním členem a_0 a $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Příklad:
Jakou částku získáme za 10 let , uložíme-li na vkladový list 100 000,- Kč při ročních úrocích 8 % ?

Řešení:

$$a_0 = 100000$$

$$a_{10} = 100000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10} = 215892{,}499$$

Získáme částku 215 892,499 Kč .

2) Odpisy strojů a zařízení:

Příklad :
Cena nového stroje činila a_0 Kč. Každoročně se cena tohoto stroje snižovala o p procent . Kolik činila cena stroje po n letech?

Řešení:
cena na počátku .... a_0

cena za jeden rok .... $a_1 = a_0 - a_0\left(\frac{p}{100}\right) = a_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

cena za dva roky .... $a_2 = a_1 - a_1 . \frac{p}{100} = a_1\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

•
•

cena za n let .... a_n

Máme určit n-tý člen geometrické posloupnosti s prvním členem a_0 a $q = \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$

$$a_n = a_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Příklad:
Do podniku byl zakoupen stroj v hodnotě 400 000,- Kč. Z ceny stroje se každoročně odepisuje 15% . Jaká bude hodnota stroje za 12 let?

Řešení:
Cena na počátku .... $a_0 = 400\,000$

Cena po 12 letech: $a_{12} = 400000.\left(1 - \dfrac{15}{100}\right)^{12} = 400000.0{,}85^{12} = 56896{,}702$

Cena stroje po 12 letech bude činit 56 896,702 Kč.

3) Úlohy o pravidelném střádání:

Příklad:
Do peněžního ústavu vkládáme na počátku každého roku částku a_0. Vklad je každoročně úročen p procenty. Kolik budeme mít naspořeno na počátku n. roku i s dalším vkladem ?

Řešení:
vklad na počátku 1. roku...... $A_1 = a_0$

na počátku 2.roku... $A_2 = a_0 .\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) + a_0$ pro jednoduchost si $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$ označíme q

na počátku 3.roku.....$A_3 = (a_0 .q + a_0).q + a_0 = a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0$
na počátku 4.roku.....$A_4 = a_0 .q^3 + a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0$

-
-

na počátku n.roku.....$A_n = a_0 .q^{n-1} + ... + a_0 .q^2 + a_0 .q + a_0$
Jedná se o součet nčlenů geometrické posloupnosti .

Částka na počátku n.roku: $A_n = a_0 . \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ kde $q = \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$

Příklad:
Pan Novák pravidelně na počátku každého roku ukládá na vkladní knížku 5000, - Kč. Vkladní knížka se každoročně úročí 6 procenty. Kolik bude mít naspořeno na začátku 15. roku (i s novým vkladem) ?

Řešení:
Vklad: 5000,- Kč

Částka na poč. 15. roku: $A_{15} = 5000.\dfrac{1{,}06^{15} - 1}{1{,}06 - 1} = 116\,379{,}849$

Na počátku 15. roku bude mít pan Novák naspořeno 116 379,849 Kč.

Příklad:
Do peněžního ústavu vkládáme na počátku každého roku částku a_0. Vklad je každoročně úročen p procenty. Kolik budeme mít naspořeno **na konci** n - tého roku?

Řešení:
vklad .... $A_0 = a_0$

po 1 roce .... $A_1 = a_0 . \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ pro jednoduchost si $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ označíme q

po 2 letech .... $A_2 = (a_0 . q + a_0).q = a_0 . q^2 + a_0 . q$

po 3 letech .... $A_3 = (a_0 . q^2 + a_0 . q + a_0).q = a_0 . q^3 + a_0 . q^2 + a_0 . q$

•

•

po n letech ...$A_n = a_0 . q^n + a_0 . q^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0 . q^2 + a_0 . q = q.(a_0 . q^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0 . q^2 + a_0 . q)$

Jedná se o součet n členů geometrické posloupnosti násobený ještě navíc q.

Částka po n -letech: $A_n = a_0 . q . \frac{q^n - 1}{q - 1}$ kde $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Příklad:

Pan Horák pravidelně na počátku každého roku ukládá na vkladní knížku 5000, - Kč. Vkladní knížka se každoročně úročí 6 procenty. Kolik bude mít naspořeno na konci 14. roku (i s nově připsanými úroky) ?

Řešení:

Vklad: 5000,- Kč

Částka konci 14. roku: $A_{14} = 5000 . 1{,}06 . \frac{1{,}06^{14} - 1}{1{,}06 - 1} = 111\,379{,}849425$

Na konci 14. roku bude mít pan Horák naspořeno 111 379,849 Kč.

Cvičení:

1. Město má 90 000 obyvatel. Jejich počet se každoročně zvyšuje o 1,3% . Určete počet obyvatel města za 15 let.

   [109 240]
2. Cena nového stroje je 150 000,- Kč , každoročně se odepisuje 5% ceny stroje z předchozího roku . Určete cenu stroje po deseti letech.

   [89 810]
3. Pan Kovář si uložil na vkladový list částku 50 000,- Kč. Určete, na kolik tato částka vzroste za 10 let, úročí-li se 5% ročně.

   [81 445]
4. Pan Kovář si uložil na vkladový list částku 50 000,- Kč. Určete, na kolik tato částka vzroste za 10 let, úročí-li se 5% ročně a na konci každého roku se z úroků strhává 15% daň.

   [75 811]
5. Určete , jakou částku musí paní Bílá uložit,aby při 5% úroku měla naspořeno za 15 let 100 000 Kč.(z úroků neplatí daň)

   [48 102]
6. Určete, při jaké úrokové míře se obnos vložený do spořitelny za dobu deseti let zdvojnásobí.

   [8,5%]
7. Pan Šetřílek si ukládá počátkem každého roku 5000,- Kč. Určete, jakou částku bude mít na konci 15. roku při úrocích 4% .

   [99 026]
8. Stroj ztrácí opotřebováním každoročně 10% své původní ceny . Určete po kolika letech klesne jeho cena na polovinu. [6,5]
9. Množství dřeva v lese každoročně naroste o 2% . . Určete, za jak dlouho se zdvojnásobí.

   [35 let]
10. Paní Nová ukládá počátkem každého roku 10 000,- Kč. Určete, jakou částku bude mít za deset let při úrokové míře 5%, je-li daň z úroků 15% .

    [126 624]
11. Určitý druh bakterií se rozmnožuje tak, že každá bakterie se za půl hodiny rozdělí na dvě. Kolik bakterií vznikne za 12 hodin?

    [16 777 215]
12. Ve městě žije v současné době 85 600 obyvatel. Kolik obyvatel lze ve městě očekávat za 6 let , jestliže se předpokládá průměrný roční přírůstek 1,7% ?

    [94 700]

Nekonečná geometrická řada

Výraz tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

kde a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ,.......a_n ,....... jsou členy posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá nekonečná řada.

Zkráceně můžeme napsat řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Tvoří-li navíc členy a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ,.......a_n ,....... geometrickou posloupnost, nazýváme řadu nekonečná geometrická řada.

Součet geometrické řady:

- vypočteme podle vzorce : $s = \dfrac{a_1}{1-q}$

Aby existoval součet geometrické řady, musí být $|q| < 1$.

<u>Příklad:</u>

Určete součet řady $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

<u>Řešení:</u>

Jedná se o geometrickou řadu , kde $a_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$. Protože je splněna podmínka $|q| < 1$, můžeme pro součet geometrické řady použít vzorec $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

$$s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Součet geometrické řady je 2.

<u>Příklad:</u>

Určete součet řady $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

<u>Řešení:</u>

Tato řada na první pohled nevypadá jako geometrická. Při bližším zkoumání zjistíme , že jsou zde dvě geometrické řady „promíchány“ do sebe. Můžeme ji rozložit na dvě geometrické řady:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$$

Určíme zvlášť součet každé řady:

$$s_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \qquad s_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \qquad s = s_1 + s_2 = \mathbf{1{,}5}$$

<u>Příklad:</u>

Napište periodické číslo $1{,}2\overline{3}$ ve tvaru zlomku .

<u>Řešení:</u>

Toto číslo má tvar 1,2333333333..........

Můžeme jej rozepsat jako součet zlomků $\dfrac{12}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1000} + \dfrac{3}{10000} + \dfrac{3}{100000} + \ldots\ldots\ldots$

Bez prvního zlomku se jedná o součet geometrické řady , kde $a_1 = \dfrac{3}{100}; q = \dfrac{1}{10}$.

První zlomek ponecháme stranou, sečteme geometrickou řadu . Výsledek sečteme s prvním zlomkem.

$$s = \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{3} = \frac{1}{30}$$

Výsledný zlomek bude mít tvar $\dfrac{12}{10} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{36+1}{30} = \dfrac{37}{30}$

Kontrolu můžeme provést na kalkulačce vydělením čísel 37:30 = 1,233333.

Příklad:

Napište periodické číslo $2,1\overline{7}\overline{3}$ ve tvaru zlomku .

Řešení:

Toto číslo má tvar 2,17373737373..................

Můžeme jej rozepsat jako součet zlomků $\frac{21}{10}+\frac{73}{1000}+\frac{73}{100000}+\frac{73}{10000000}+\ldots\ldots\ldots.$

Bez prvního zlomku se jedná o součet geometrické řady , kde $a_1 = \frac{73}{1000}; q = \frac{1}{100}$.

První zlomek ponecháme stranou, sečteme geometrickou řadu . Výsledek sečteme s prvním zlomkem.

$s = \frac{\frac{73}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{73}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{\frac{73}{10}}{99} = \frac{73}{990}$ Výsledný zlomek má tvar $\frac{21}{10}+\frac{73}{990} = \frac{2079+73}{990} = \frac{2152}{990} = \frac{1076}{495}$

Příklad:

Řešte rovnici $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \ldots\ldots\ldots = 1$

Řešení:

Nejprve sečteme řadu na levé straně rovnice. Levou stranu ještě upravíme na tvar:

$$2^x + \left(2^x\right)^2 + \left(2^x\right)^3 + \left(2^x\right)^4 + \ldots\ldots$$

Jedná se o geometrickou řadu , kde $a_1 = 2^x$; $q = 2^x$. Aby měla řada součet musí být $2^x < 1$, tedy $2^x < 2^0$, odtud $x < 0$.

Součet řady určíme podle vzorce: $s = \frac{2^x}{1-2^x}$

Dále řešíme rovnici

$$\frac{2^x}{1-2^x} = 1 / (1-2^x)$$

$$2^x = 1-2^x$$

$$2.2^x = 1$$

$$2^x = \frac{1}{2}; x = -1$$

Vypočtený kořen ***x = -1*** vyhovuje podmínce.

Příklad:

Určete, pro která x lze určit součet řady a určete ho: $1 + (1+x)^2 + (1+x)^3 + (1+x)^4 + \ldots\ldots$

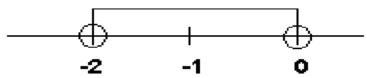
Řešení:

Jedná se o geometrickou řadu $a_1 = 1$, $q = (1+x)$

musí být $|1 + x| < 1$

Nerovnice se řeší metodou nulového bodu:

x splňuje podmínku: $-2 < x < 0$



$$s = \frac{1}{1-1-x} = -\frac{1}{x}$$

Příklad:

Určete hodnotu součinu $y = 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\ldots\ldots$

Řešení:

Protože se jedná o součin a ne součet, musíme nejprve celou rovnost logaritmovat - získáme součet logaritmů:

$$\log y = \log 3 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{8}\log 3 + \frac{1}{16}\log 3 + \ldots\ldots\ldots$$

na pravé straně je nekonečná geometrická řada : $a_1 = \log 3$, $q = \frac{1}{2}$

$$s = \frac{\log 3}{1-\frac{1}{2}} = 2\log 3 = \log 3^2$$

Po dosazení do rovnosti : log y = log 9

<u>y = 9</u>

Cvičení:

1) Sečtěte tyto řady:

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots.$ b) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\ldots$

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-.....$ d) $5+\frac{7}{2}+\frac{49}{20}+.....$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ g) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}+.....$

[a) 1,5 ; b) 3 ; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{50}{3}$; e) 0,5 ; f) 0,25 ; g) 2- $\sqrt{2}$]

2) Převeďte na zlomky:

a) $8,\overline{4}$ b) $0,4\overline{7}$ c) $3,\overline{012}$ d) $2,\overline{486}$

$\left[\ a)\frac{76}{9};b)\frac{43}{90};c)\frac{1003}{333};d)\frac{92}{37}\ \right]$

3) Řešte rovnice:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ b) $-\frac{2}{5}=x-2x^2+x^3-2x^4+\ldots.$

$\left[\ a)\sqrt{2}-1;b)-\frac{1}{4};\frac{2}{3}\ \right]$

4) Určete součet řady: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+.......$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

5) Určete součet řady: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}.......$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

6) Určete součet řady: $2+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{27}-\frac{1}{4}+.......$ $\left[\frac{11}{6}\right]$

7) Převeďte na zlomek: $1,0\overline{23}$ $\left[\frac{1013}{990}\right]$

8) Určete součet řady: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+.......$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

9) Určete součet řady: $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\frac{81}{256}-\frac{243}{1024}.......$ $\left[\frac{4}{7}\right]$

10) Určete součet řady: $\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^3+\left(\sqrt{5}-2\right)^4+....$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$

11) Určete, pro která x existuje součet řady a určete ho: $1+\left(2-x\right)+\left(2-x\right)^2+\left(2-x\right)^3+\ldots$

$\left[\frac{1}{x-1};1\prec x\prec 3\right]$

12) Určete hodnotu výrazu: $\dfrac{1+2+3+4+5+.....+n}{n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+....}$ $\left[\frac{1+n}{4}\right]$

13) Řešte rovnici: $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+........=2$ $[x=10]$

14) Řešte rovnici: $1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+...........=\frac{4x-3}{3x-4}$ $[x_1=6;x_2=1]$

jeden kořen není kořenem

15) Řešte rovnici: $2^x+4^x+8^x+16^x+.........=1$ $[x=-1]$

16) Řešte rovnici: $1+\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+.......=2tgx$ $[45^\circ,225^\circ]$

17) Určete součet řady: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4+....$ $\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4}\right]$

18) Řešte rovnici: $1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}+...........=\frac{6}{x+5}$ $[x_1=4;x_2=-3]$

19) Řešte rovnici: $2^x\cdot\sqrt{2^x}\cdot\sqrt[4]{2^x}\cdot\sqrt[8]{2^x}\cdot\sqrt[16]{2^x}.......=0,25$