10

Goniometrické funkce obecného úhlu

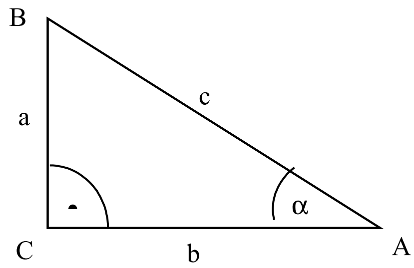
V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou definovány funkce sin , cos, tg , cotg libovolného úhlu takto:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$ protilehlá odvěsna ku přeponě

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$ přilehlá odvěsna ku přeponě

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$ protilehlá odvěsna ku přilehlé odvěsně

$$cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$$ přilehlá odvěsna ku protilehlé odvěsně



Významné hodnoty gon. funkcí

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos α	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tg α	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**nedef.**
cotg α	**nedef.**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Goniometrické vzorce

1) Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot\ gx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$tgx = \frac{1}{co\ \ tgx}$$

2) Vzorce dvojnásobného argumentu

$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3) Vzorce polovičního argumentu

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

4) Součtové vzorce

1) $\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

2) $\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

3) $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

4) $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

5) $\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

6) $\sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

7) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

8) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

Příklad:
Je dána goniometrická funkce **sin x = 0,8** . Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu. Využijte základní vztahy mezi funkcemi.
Řešení:
Nejprve vypočteme **cos x** . Využijeme vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Vyjádříme a dosadíme $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$$\cos x = \sqrt{1-0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Dále využijeme vztah $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad tgx = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\quad \cot gx = \frac{1}{tgx} = \frac{3}{4}$

Řešení bylo provedeno pouze v prvním kvadrantu.

Příklad:
Je dána goniometrická funkce **tg x = 0,75** . Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu. Využijte základní vztahy mezi funkcemi.
Řešení:

První vypočteme hodnotu funkce **cotg x** ze vztahu $\cot g\, x = \frac{1}{tgx} = \frac{4}{3}$

Dále dosadíme do vztahu $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ zadanou hodnotu **tg x** a vzorec $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$$\frac{3}{4} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \,/^2$$

$$\frac{9}{16} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$9(1-\sin^2 x) = 16\sin^2 x$$

$$9 - 9\sin^2 x = 16\sin^2 x$$

$$9 = 25\sin^2 x$$

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

Nakonec určíme **cos x** : $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$$\cos x = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Příklad:

Zjednodušte výraz: $\frac{1}{1+\cot g^2 x} + \left(\frac{\cos x - \sin x}{1 - tgx}\right)^2$

Řešení:

$$\frac{1}{1+\cot g^2 x}+\left(\frac{\cos x-\sin x}{1-tgx}\right)^2=\frac{1}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}+\left(\frac{\cos x-\sin x}{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}}\right)^2=\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}+\left(\frac{\cos x-\sin x}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}}\right)^2=$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

Příklad:

Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=-1$

Cvičení:

1. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^2 x-1}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$

   [$\text{cotg}^2 x$]

2. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1+\cot g^2 x}{1+tg^2 x}$

   [$\text{cotg}^2 x$]

3. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin x-\ddot{}\cos x}{(\cot gx-1)}$

   [$-\sin x$]

4. Zjednodušte výraz: $1-\dfrac{\cot g^2 x}{1+\cot g^2 x}$

   [$\sin^2 x$]

5. Zjednodušte výraz: $\dfrac{2\cos^2 x-1}{(1-\sin^2 x)(1-tg^2 x)}$

   [1]

Příklad:
Určete hodnotu funkce sin 75°.

Řešení:
Úhel rozložíme na součet dvou známých úhlů: sin (45°+ 30°)
Použijeme vzorec: $\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$

sin 75°= sin 45°cos30°+ cos45°sin30° $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Příklad:
Určete hodnotu funkce cos 105°.

Řešení:
Úhel rozložíme na součet dvou známých úhlů: cos (60°+ 45°)
Použijeme vzorec: $\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$

cos 105°= cos 60°.cos 45° - sin 60°. sin 45° $=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}$

Příklad:

Určete hodnotu $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Řešení:

Funkci budeme posuzovat jako funkci polovičního argumentu k funkci $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Použijeme vzorec: $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Příklad:
Převeďte na funkci tg.

Řešení:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \underbrace{\frac{\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{1}{\cos y}}}_{*1)} = \frac{\sin x-\cos x\cdot\frac{\sin y}{\cos y}}{\sin x+\cos x\cdot\frac{\sin y}{\cos y}} = \underbrace{\frac{\cos x(\frac{\sin x}{\cos x}-tgy)}{\cos x(\frac{\sin x}{\cos x}+tgy)}}_{*2)} = \frac{tgx-tgy}{tgx+tgy}$$

*1) rozšíříme $\frac{1}{\cos y}$

*2) vytkneme cos x

Příklad:
Vypočtěte tg 345°

Řešení:
tg 345°
1) odečteme periodu 180°………….. tg 345°= tg 165°
2) rozložíme na tg(120°+ 45°)
tg 120°= tg (180°- 60°) = - tg 60°= $-\sqrt{3}$
tg 45° = 1
3) Použijeme vzorec:

$$tg(x+y) = \frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy} = \frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}\cdot 1} = \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}_{*3)} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = \underbrace{-\frac{2(2-\sqrt{3})}{2}}_{*4)} = -2+\sqrt{3}$$

*3) usměrníme zlomek $1-\sqrt{3}$ *4) vytkneme 2 a krátíme

Upravte na součin: sin 3x – sin x
Řešení:

$$\sin 3x-\sin x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2} = 2\cos 2x\sin x$$

Příklad:

Převeďte na funkce s jednoduchým argumentem $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Řešení:

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot gx$$

1. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$

[2 sin x]

2. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$ [sin x – cos x]

3. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}$

[tg x]

4. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\cos x-\sin x}{1-tgx}$

[cos x]

5. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$

[$\cot g^2$ x]

6. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1}{1-\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{1+\sin x}$

[$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$]

7. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

[$\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}$]

8. Zjednodušte výraz: $\dfrac{tgx+tg^3x}{\cot gx+\cot g^3x}$

[tg^4x]

9. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin x}+\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin x}$

[2 tg^2x]

10. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin x}-\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin x}$

[2.sinx . tg^2 x]

11. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin x-\sin^2 x}{\cos x-\cos^3 x}$

[cotg x]

12. Zjednodušte výraz: $\dfrac{1+tg^2x}{1+\cot g^2x}$

[tg^2 x]

13. Zjednodušte výraz: $(1+tgx)^2+(1-tgx)^2$

[$\dfrac{2}{\cos^2 x}$]

14. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}-\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

[0]

15. Zjednodušte výraz: $tg^2x-\sin^2 x-tg^2x\cdot\sin^2 x$

[0]

16. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin^3 x}{\cos x-\cos^3 x}-tgx$

[0]

17. Zjednodušte výraz: $\dfrac{tgx}{1+tg^2x}-\dfrac{\cot gx}{1+\cot g^2x}$

[0]

18. Zjednodušte výraz: $tgx+\cot gx-\dfrac{\cot gx}{\cos^2 x}$

[0]

19. Zjednodušte výraz: $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}-\dfrac{1+\cot gx}{1-\cot gx}$

[0]

20. Zjednodušte výraz: $(1+\sin x)\cdot(1+\cos x)-(\sin x+tgx)\cdot(\cos x+\cot gx)$

[0]

21. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu α, je-li $\sin\alpha=\dfrac{40}{41}$

[cos α = 9/41; tg α = 40/9; cotg α = 9/40]

22. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu α, je-li $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$

[sin α = 12/13; tg α = 12/5; cotg α = 5/12]

23. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí bez výpočtu úhlu α, je-li $tg\alpha=\dfrac{5}{12}$

[sin α = 5/13; cos α = 12/13; cotg α = 12/5]

Úlohy o pravoúhlém trojúhelníku

1. V pravoúhlém trojúhelníku DEF je dána velikost přepony d = 8 cm , a velikost úhlu β u vrcholu F , $\beta = 62°40'$. Určete velikosti všech stran a vnitřních úhlů.
   [$\alpha = 27°20'$; f = 7,11 cm ; e = 3,67 cm]
2. Nosník má vodorovné rameno délky d = 95 cm . Určete délku x šikmého ramene , svírá - li s vodorovným směrem úhel $\beta = 50°$.
   [148 cm]
3. Vypočtěte délku stran rovnoramenného trojúhelníku ABC, je - li $v_c = 8{,}4$ cm , úhel při základně $\alpha = 32°10'$.
   [c = 26,66 cm , a = 15,77 cm]
4. Na hmotný bod působí dvě síly téže velikosti $F_1 = F_2 = 36$ N., které svírají úhel $\alpha = 65°$. Určete velikost výslednice F.
   [60,7 N]
5. Vzdálenost dvou železničních stanic je 4000 m . Stoupání železniční trati je 8‰. Vypočtěte výškový rozdíl stanic a úhel stoupání.
   [$\alpha = 0°27'$, d = 32 m]
6. Schodiště s 50 schody má výšku 9 m a sklon 24°. Vypočtěte výšku v a šířku c jednoho schodu.
   [v = 0,18 m ; c = 0,404 m]
7. Vypočtěte výšku vodárenské věže , je - li měřící přístroj od její paty vzdálen 85 m a je-li výškový úhel $\alpha = 18°30'$.
   [28,44 m]
8. Vypočtěte výškový rozdíl dvou stanic lanovky, jestliže její stoupání je 67‰ a délka jednoduchého lana 930 m .
   [62,2 m]
9. Na hmotný bod působí síla o velikosti F = 35 N , která svírá s osou y úhel $\alpha = 25°40'$. Rozložte tuto sílu na složky F_x a F_y .
   [$F_x = 15{,}16$ N ; $F_y = 31{,}55$ N]
10. Štít střechy má tvar rovnoramenného trojúhelníku. Šířka je 12,8 m , sklon střechy 38°. Vypočtěte výšku štítu.
    [5 m]
11. Štít na domě 12,5 m širokém má tvar rovnoramenného trojúhelníka o výšce 4 m. Jaký úhel svírají obě části střechy?
    [114°46´]
12. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa té roviny ve výškovém úhlu 39°25´. Přiblížíme-li se k ní o 50m , vidíme vrchol věže V pod úhlem 58°42´. Jak vysoká je věž ?
    [82,1 m]
13. Z vrcholu pahorku ležícího 75 m nad vodní hladinou je vidět přesně za sebou 2 lodičky pod hloubkovými úly $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$. Určete jejich vzdálenost.
    [31 m]
14. Úhel nakloněné roviny je 18° 30´ . Jak velká síla udrží v rovnováze břemeno působící tíhovou silou 520 N , působí-li rovnoběžně s nakloněnou rovinou ?
    [165 N]
15. Úhel nakloněné roviny je 18° 30´ . Jak velká síla udrží v rovnováze břemeno působící tíhovou silou 520 N , působí-li rovnoběžně se základnou nakloněné roviny ?
    [174 N]
16. V jaké zeměpisné šířce vrhá svislá tyč vysoká 2,5 m v době rovnodennosti v poledne na vodorovnou rovinu stín 3,6 m dlouhý ?
    [55°13´]
17. Z okna ležícího 8 m nad horizontální rovinou vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu 53°20´, její patu v hloubkovém úhlu 14°15´. Jak vysoká je věž ?
    [50,3 m]
18. Dvě kolmé síly $F_1 = 12$N a $F_2 = 5$ N působí v jednom bodě. Jaká výslednice má stejný účinek jako obě tyto síly a jaké úhly svírá se směry sil F_1 a F_2 ?
    [13 N , 22°31´ , 67°29´]