11

Zobrazení goniometrických funkcí na jednotkové kružnici, významné hodnoty goniometrických funkcí. Řešení goniometrických rovnic.

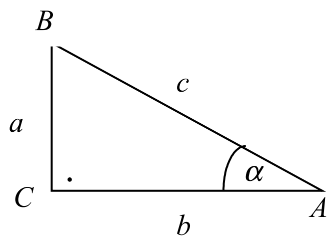
V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou definovány funkce sin , cos, tg , cotg libovolného úhlu takto:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ protilehlá odvěsna ku přeponě

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ přilehlá odvěsna ku přeponě

$tg\alpha = \frac{a}{b}$ protilehlá odvěsna ku přilehlé odvěsně

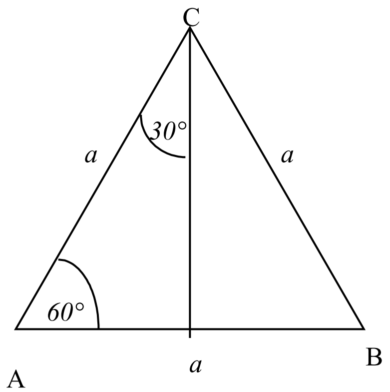
$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ přilehlá odvěsna ku protilehlé odvěsně



Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. V tomto trojúhelníku sestrojíme výšku v_c. Tato výška půlí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých se vyskytují úhly velikosti 30° a 60°. Z tohoto obrázku můžeme odvodit hodnoty goniometrických funkcí těchto úhlů.

Nejprve určíme Pythagorovou větou v_c:

$$v_c = \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



$$\sin 30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^o = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot g30^o = \frac{1}{tg30^o} = \sqrt{3}$$

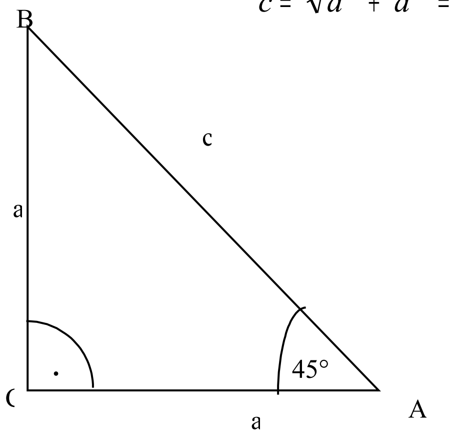
$$\sin 60^o = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^o = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot g60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

K odvození hodnot goniometrických funkcí úhlu 45° použijeme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC:



Nejprve určíme Pythagorovou větou c:

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\sin 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

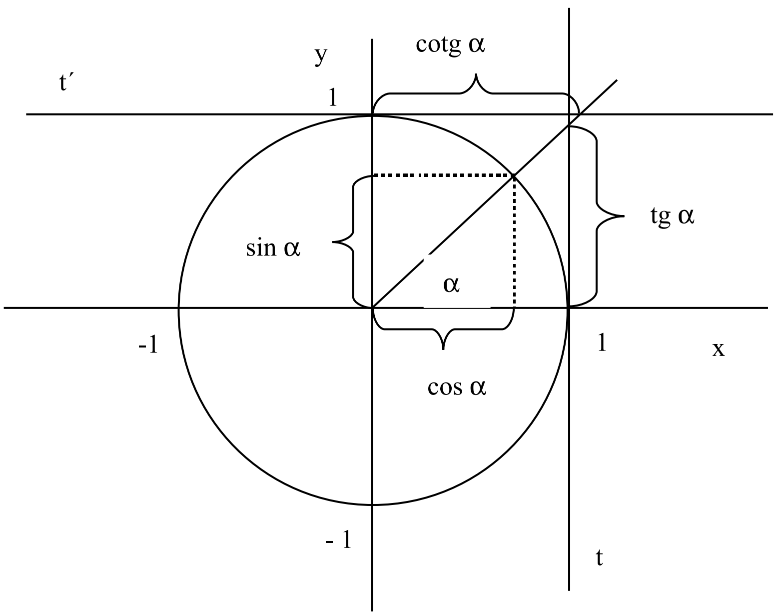
$$tg 45^o = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot g 45^o = 1$$

Z odvozených hodnot sestavíme tabulku a doplníme ji i o úhly 0°a 90°.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos α	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tg α	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**nedef.**
cotg α	**nedef.**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**

Na jednotkové kružnici můžeme jednotlivé goniometrické funkce zobrazit takto:

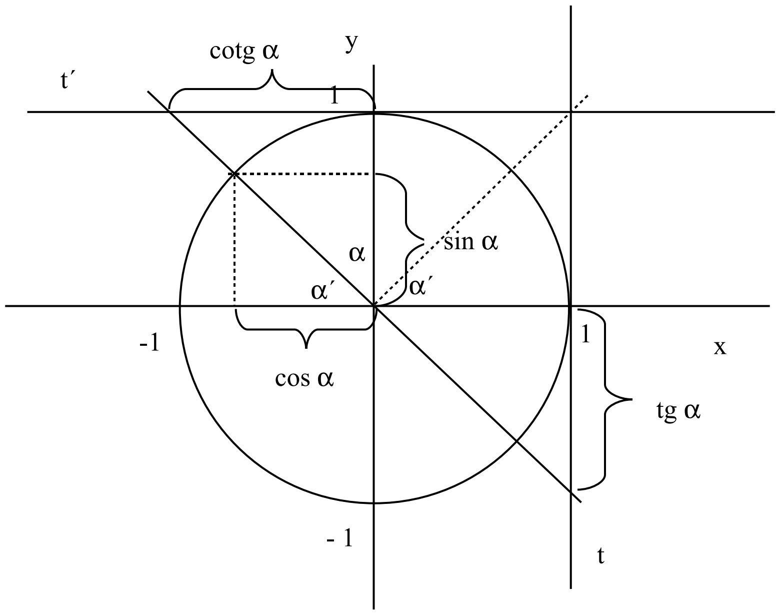


Zde je vidět např. , že **sin 0° = 0 , cos 0 °= 1 , tg 0°= 0 , cotg 0°** není definován , dále **sin 90°= 1 , cos 90°= 0 , tg 90°** není definován , **cotg 90°= 0**

Pokud chceme určovat hodnoty goniometrických funkcí úhlů větších než 90°, musíme vždy nejprve určit, v kterém kvadrantu leží koncové rameno úhlu a potom postupovat individuálně v každém kvadrantu.

Úhly druhého kvadrantu: (90° - 180°)

Při určení hodnot gon. funkcí musíme vyjít z obrázku $\underline{\alpha = (180° - \alpha')}$



sin α = sin (180° - α´)

cos α = - cos (180° - α´)

tg α = - tg (180° - α ´)

cotg α = - cotg (180° - α´)

Příklad:

sin 150° = sin (180° - 30°) = sin 30° = 0,5

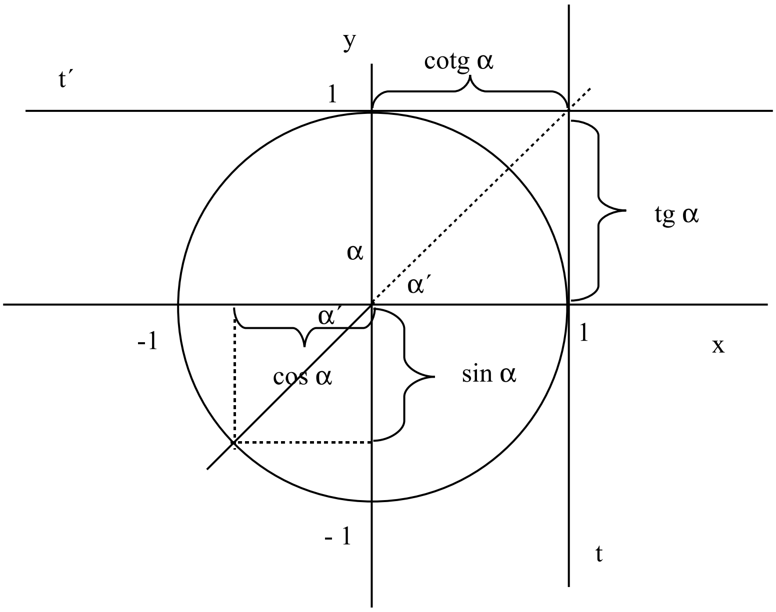
cos 135° = cos (180° - 45°) = - cos 45° = $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

tg 120° = tg (180° - 60°) = - tg 60° = $-\sqrt{3}$

cotg 150°= cotg (180° - 30°) = - cotg 30° = $-\sqrt{3}$

Úhly třetího kvadrantu: (180° - 270°)

Při určení hodnot gon. funkcí musíme vyjít z obrázku $\underline{\alpha = (180° + \alpha')}$



sin α = - sin (180° + α´)

cos α = - cos (180° + α´)

tg α = tg (180° + α´)

cotg α = cotg (180° + α´)

Příklad:

$\sin 225° = \sin (180° + 45°) = - \sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

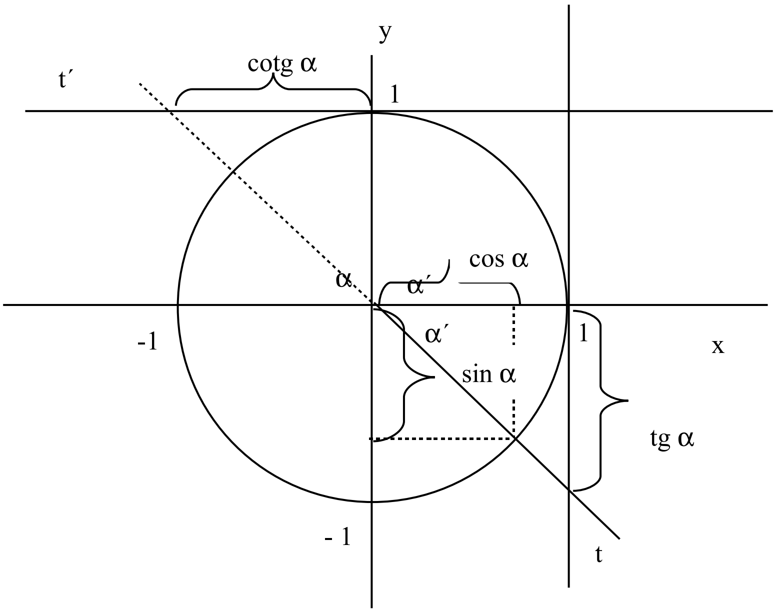
$\cos 210° = \cos (180° + 30°) = - \cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 240° = \mathrm{tg}\, (180° + 60°) = \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$

$\mathrm{cotg}\, 225° = \mathrm{cotg}\, (180° + 45°) = \mathrm{cotg}\, 45° = 1$

Úhly čtvrtého kvadrantu: (270° - 360°)

Při určení hodnot gon. funkcí musíme vyjít z obrázku $\alpha = (360° - \alpha')$



$\sin \alpha = - \sin (360° - \alpha')$

$\cos \alpha = \cos (360° - \alpha')$

$\mathrm{tg}\, \alpha = - \mathrm{tg}\, (360° - \alpha')$

$\mathrm{cotg}\, \alpha = - \mathrm{cotg}\, (360° - \alpha')$

Příklad:

$\sin 330° = \sin (360° - 30°) = - \sin 30° = - 0{,}5$

$\cos 315° = \cos (360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 300° = \mathrm{tg}\, (360° - 60°) = - \mathrm{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$

$\mathrm{cotg}\, 315° = \mathrm{cotg}\, (360° - 45°) = - \mathrm{cotg}\, 45° = - 1$

Z výše uvedených odvození lze dále udělat několik závěrů:

- perioda funkcí sin α a cos α je 360°
- perioda funkcí tg α a cotg α je 180°
- lze přesně určit znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

	I	II	III	IV
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-

Se znalostí určování hodnot goniometrických funkcí v těchto čtyřech kvadrantech vystačíme již pro všechny hodnoty úhlů. Stačí pouze odečíst periodu, umístit úhel do příslušného kvadrantu a vypočítat jeho hodnotu.

Příklad:

sin 510° = sin 150° = sin (180° - 30°) = sin 30° = 0,5

cos 855° = cos 135° = cos (180° - 45°) = - cos 45° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad:
Hodnota úhlu může být zadána v radiánech, pak pouze převedeme na stupně a vypočteme hodnotu podle známého postupu.

$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Příklad:
Hodnota úhlu může být zadána v radiánech a je větší než perioda dané funkce. Pak je výhodnější u funkcí sin a cos odečíst násobky periody 2π a potom teprve převést na stupně, u funkcí tg a cotg odečítáme násobky periody π.

$$\sin\frac{16\pi}{3} = \sin(5\tfrac{1}{3}\pi) = \sin(5\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \sin(\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \sin\frac{4\pi}{3} = \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) =$$

$$= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Goniometrické rovnice

Jsou to rovnice, kde se neznámá vyskytuje v argumentu goniometrické funkce.

1. Základní goniometrická rovnice:

a) typ: *f(x) = c*

Příklad: $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_1 = 30°$

$x_2 = 150°$

Obecně: $x_1 = 30° + k \cdot 360°$

$x_2 = 150° + k \cdot 360°$

Příklad: $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = 30° + k \cdot 180°$

Pro funkce **tg x** a **cotg x** stačí najít pouze jedno řešení, další získáváme přičtením k - násobku periody 180°. Pro funkce **sin x** a **cos x** musíme hledat řešení dvě, perioda je 360°.

Příklad: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad\qquad$ $x' = 45°$

Funkce sin x je záporná v III. a ve IV. kvadrantu:

$x_1 = 225° + k.360°$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 315° + k.360°$

b) typ: *f(x + d) = c*

Příklad: $\sin(x + 30°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Zavedeme substituci: $y = x + 30°$

$\sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = 45° + k.\ 360°$ $\qquad\qquad$ $x_1 = 15° + k.\ 360°$

$y_2 = 135° + k.\ 360°$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 105° + k.\ 360°$

Příklad: $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

substituce $\dfrac{\pi}{3} - 2x = y$ $\qquad\qquad$ $x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{y}{2}$

$\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad\qquad$ k je libovolné celé číslo, znaménko můžeme zanedbat

$y_1 = 60° + k.\ 360° = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad\qquad$ $x_1 = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} - k\pi = k\pi$

$y_2 = 120° + k.\ 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{6} - k\pi = -\dfrac{\pi}{6} - 2k\pi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

c) typ: *f(n.x + d) = c*

Příklad: $\cos(3x - 60°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Zavedeme substituci $3x - 60° = y$ $\quad$ => $\quad$ $x = \dfrac{y + 60°}{3}$

$\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = 45° + k.360°$

$y_2 = 315° + k.360°$

$$x_1 = \frac{45° + k.360° + 60°}{3} = \frac{105° + k.360°}{3} = 35° + k.120°$$

$$x_2 = \frac{315° + k.360° + 60°}{3} = \frac{375° + k.360°}{3} = 125° + k.120°$$

2) Složitější goniometrické rovnice:

a) Obsahující jen 1 goniometrickou funkci

Příklad: $2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0$

řešíme substitucí : $y = \cos x$

$2y^2 + 7y + 3 = 0$

$D = 25 \quad y_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 5}{4} \quad y_1 = -3$

$y_2 = -\dfrac{1}{2}$

$\cos x = -3$ není definováno

$\cos x = -0,5 \quad x_1 = 120° + k.360°$

$x_2 = 240° + k.360°$

b)Goniometrické rovnice obsahující více goniometrických funkcí

se musí zjednodušit pomocí vztahů mezi goniometrickými funkcemi tak , aby obsahovaly jen jednu funkci.

Příklad: $2 \sin^2 x - \cos^2 x - 4 \sin x + 2 = 0$

nahradíme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2 \sin^2 x - 1 + \sin^2 x - 4 \sin x + 2 = 0$

$3 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$

substituce: $\sin x = y$

$3y^2 - 4y + 1 = 0$

$D = 4 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = \dfrac{1}{3}$

$\sin x = 1 \quad \sin x = \dfrac{1}{3}$

$x_1 = 90° + k.360°$

$x_2 = 19°28' + k.\ 360°$

$x_3 = 160°32' + k.\ 360°$

Příklad: $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

nahradíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

substituce: $\cos x = y$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2) (y + 1) = 0$

$y_1 = -1 \quad y_2 = 2$

$\cos x = -1 \quad x = 180° + k.360°$

c)Goniometrické rovnice řešené pomocí vzorců

Příklad: $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$

$\sin 3x + \sin x = \sin 2x$

Řešíme pomocí vzorce $\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

$$2.\sin\frac{3x+x}{2}.\cos\frac{3x-x}{2} = 2\sin x\cos x$$

$$2.\sin\frac{4x}{2}.\cos\frac{2x}{2} = 2\sin x\cos x$$

$\sin 2x.\cos x = \sin x\cos x$ / : cos x $\rightarrow$ cos x = 0 $\rightarrow$ $x_1 = 90° + k.180°$

$\sin 2x = \sin x$

$2\cdot\sin x\cos x = \sin x$ / : sin x $\rightarrow$ sin x = 0 $\rightarrow$ $x_2 = 0° + k.180° = k.180°$

$2\cdot\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $x_3 = 60° + k.360°$ $x_4 = 300° + k.360°$

Cvičení:

Řešte goniometrickou rovnici:

1.) $\sin x = -\frac{1}{2}$ [{210°+ k. 360°; 330° + k. 360° }]

2.) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [{45°+ k. 360°; 135° + k. 360° }]

3.) $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [{30°+ k. 180°}]

4.) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ [{45°+k.360°;135°+ k.360°;225°+ k.360°;315°+ k.360°}]

5.) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ [{45°+ k. 360°}]

6.) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\frac{1}{2}$ $\left[\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

7.) $2\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x$ $\left[\left\{k\pi ; \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

8.) $\cot g^2 x = -\cot gx$ $\left[\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right\}\right]$

9.) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$ [{30°+k.360°;150°+ k.360°;270°+ k.360°}]

10.) $2tgx - 3\cot gx = 1$ [{56°19´°+k.180°;135°+ k.180°}]

11.) $3tg^2 x + 4\sqrt{3}tgx + 3 = 0$ $\left[\left\{\frac{5}{6}\pi + k\pi ; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}\right]$

12.) $\sqrt{3}\cot g^2 x - 2\cot gx - \sqrt{3} = 0$ $\left[\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}\right]$

13.) $2 - 2\cos^2 x - \sqrt{3} = 0$ $\left[\left\{k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

14.) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4\cot gx = 0$ $\left[\left\{\frac{2}{3}\pi + k\pi ; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right\}\right]$

15.) $\frac{tgx + 1}{tgx - 1} = 2 + \sqrt{3}$ $\left[\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in Z\right\}\right]$

16.) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ $\left[\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right\}\right]$

17.) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - 4tgx = 0$ $\left[\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\,;\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}\right]$

18.) $2 + \cos 2x = -5\sin x$ $\left[\left\{\frac{7}{6}\pi\,;\frac{11}{6}\pi\right\}\right]$

19.) $tg^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ $\left[\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3}{4}\pi\,;\frac{5}{4}\pi\,;\frac{7}{4}\pi\right\}\right]$

20.) $\sin x\cos x = \frac{1}{2}$ $\left[\left\{45^o + k.180^o\right\}\right]$

21.) $\sin^2 x - \sin x = 0$ $\left[\left\{k\pi\,;\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right]$

22.) $2\cos^2 x = \sin^2 x - 1$ $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

23.) $tgx + \cot gx = \frac{13}{6}$ $\left[33^o 40';56^o 20';213^o 40';236^o 20' + k.180^o\right]$

24.) $3tgx - 1 = 2tgx$ $\left[45^o + k.180^o\right]$

25.) $3\sin x + \sqrt{2} = -\sqrt{2}\sin x + 3$ $\left[21^o 10' + k.360^o;158^o 50' + k.360^o\right]$

26.) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$ $\left[\left\{k\pi\,;\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,;\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}\right]$

27.) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ $\left[\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{2\pi}{5} + (2k+1)\pi\right\}\right]$

28.) $\sin 2x + \cos 2x - tgx = 1$ $\left[\left\{k\pi\,;\frac{\pi}{8} + k\pi\,;\frac{5\pi}{8} + k\pi\right\}\right]$