

Řešení obecného trojúhelníku, věta sinová a kosinová

Sinová věta

- platí v obecném trojúhelníku (nemusí být pravouhlý)

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Poměr délek stran je roven poměru sinů protilehlých vnitřních úhlů.

Nejpoužívanější tvar:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Použití:

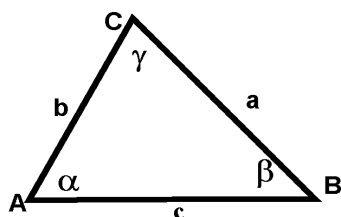
K výpočtu ostatních prvků v trojúhelníku, je-li dáno:

- dvě strany a úhel proti větší z nich
- dva úhly a strana

Příklad:

Je dán trojúhelník ABC,  $a = 395$ ,  $b = 287$ ,  $\alpha = 42^\circ 20'$ . Určete  $c$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Řešení:



1) Výpočet  $\beta$  :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{287 \cdot \sin 42^\circ 10'}{395}$$

$$\beta = \underline{\underline{29^\circ 10'}}$$

2) Výpočet  $\gamma$  :  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

$$\gamma = \underline{\underline{108^\circ 22'}}$$

3) Výpočet  $c$  :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{395 \cdot \sin 108^\circ 22'}{\sin 42^\circ 20'}$$

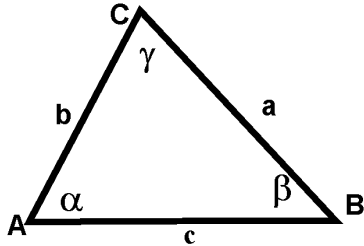
$$c = 556,7$$

### Cvičení :

1. Je dán trojúhelník ABC :  $a = 25,6$  ,  $\beta = 35^\circ 40'$  ,  $\gamma = 67^\circ 30'$  . Určete  $\alpha$  ,  $b$  ,  $c$  .  
[ $\alpha = 75^\circ 50'$  ;  $b = 15,8$  ;  $c = 24,4$ ]
2. Je dán trojúhelník ABC :  $a = 57,6$  ,  $c = 48,8$  ,  $\alpha = 123^\circ 20'$  . Určete  $\beta$  ,  $\gamma$  ,  $b$  .  
[ $\beta = 11^\circ 36'$  ;  $\gamma = 45^\circ 04'$  ;  $b = 13,9$ ]
3. Je dán trojúhelník ABC :  $b = 34,5$  ;  $a = 28,9$  ;  $\gamma = 38^\circ 20'$  . Určete  $\beta$  ;  $a$  ;  $c$  .  
[ $\beta = 85^\circ 10'$  ;  $a = 28,9$  ;  $b = 21,5$ ]

### Kosinová věta

Platí v obecném trojúhelníku.



$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma\end{aligned}$$

Je - li velikost úhlu  $\gamma = 90^\circ$  , potom platí:

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 90^\circ \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0 \\c^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Pythagorova věta je tedy zvláštním případem kosinové věty.

Použití:

k výpočtu ostatních prvků v trojúhelníku , je-li dáno:

- dvě strany a úhel jimi sevřený
- tři strany

Příklad:

Je dán trojúhelník ABC :  $a = 35$  ,  $b = 29$  ,  $\gamma = 60^\circ$  . Určete  $c$  ,  $\alpha$  ,  $\beta$  .

Řešení:

1) Výpočet  $c$  :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$   
 $c = 32,4$

2) Výpočet  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin \beta} &= \frac{c}{\sin \gamma} \\ \sin \beta &= \frac{b \cdot \sin \gamma}{c} \\ \beta &= 50^\circ 49'\end{aligned}$$

3) Výpočet  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - \beta - \gamma \\ \alpha &= 69^\circ 11'\end{aligned}$$

*Při výpočtech počítáme největší úhel jako poslední!!!*

Příklad:

Je dán trojúhelník ABC :  $a = 19$  ,  $c = 6$  ,  $\beta = 44^\circ 08'$  . Určete  $b$  ,  $\alpha$  ,  $\gamma$  .

Řešení:

1) Výpočet  $b$  :  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$   
 $b = 15,09$

Při nedodržení správného pořadí by vyšlo:

2) Výpočet  $\alpha$  :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b} \quad \alpha = 61^{\circ}15'$$

3) Výpočet  $\gamma$ :  $\gamma = 180 - \alpha - \beta$   
 $\beta = 74^{\circ}37'$

Toto řešení není správné, protože je porušeno pravidlo, kdy proti největší straně musí ležet největší úhel.

Správný je tento postup:

2) Úhel  $\gamma$ :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \beta}{b} \quad \gamma = \underline{16^{\circ}03'}$$

3) Úhel  $\alpha$ :  $\alpha = 180^{\circ} - \beta - \gamma$   
 $\alpha = \underline{119^{\circ}49'}$

Cvičení:

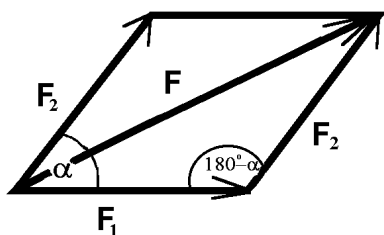
- 1) Je dán trojúhelník ABC : a = 7 ; b = 6 , c = 5 . Určete  $\alpha$  ,  $\gamma$  ,  $\beta$  .  
 $[\alpha = 78^{\circ}28' ; \beta = 57^{\circ}07' ; \gamma = 44^{\circ}25']$
- 2) Je dán trojúhelník ABC : a = 20; b = 21 , c = 29. Určete  $\alpha$  ,  $\gamma$  ,  $\beta$  .  
 $[\alpha = 43^{\circ}36' ; \beta = 46^{\circ}24' ; \gamma = 90^{\circ}]$
- 3) Je dán trojúhelník ABC : a = 75; b = 64 ,  $\gamma = 42^{\circ}30'$ . Určete c ,  $\alpha$  ,  $\beta$  .  
 $[\alpha = 77^{\circ}30' ; \beta = 60^{\circ} ; c = 51,9]$
- 4) Je dán trojúhelník ABC :  $\alpha = 0,845$  rad;  $\beta = 0,682$  rad , c = 5,24. Určete a , b ,  $\gamma$  .  
 $[\gamma = 10615$  rad ; a = 3,95 , b = 3,3]
- 5) Je dán trojúhelník ABC : c = 10,82; b = 8,54 ;  $\gamma = 72^{\circ}10'$ . Určete a ,  $\alpha$  ,  $\beta$  .  
 $[\alpha = 59^{\circ}10' ; \beta = 48^{\circ}40' ; a = 9,76]$
- 6) Určete obsah trojúhelníku ABC , je-li dáno: a = 25,10 ;  $\alpha = 63^{\circ}$  ;  $\beta = 38^{\circ}$  .  
(Použijte vzorec  $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ ) [213,6]
- 7) Určete  $\alpha$  ,  $\beta$  ,  $\gamma$  , je - li a : c = 3 : 5 ;  $\gamma = 2 \alpha$  .  
 $[\alpha = 33^{\circ}33' ; \beta = 79^{\circ}21' ; \gamma = 67^{\circ}06']$
- 8) Je dán trojúhelník ABC : a = 16,9; b = 21,8 ; c = 19,4. Určete  $\alpha$  ,  $\beta$  ,  $\gamma$  .  
 $[\alpha = 48^{\circ} ; \beta = 73^{\circ}27' ; \gamma = 58^{\circ}33']$
- 9) Je dán trojúhelník ABC : a = 51,34; b = 34,75 ;  $\gamma = 64^{\circ}30'$ . Určete c ,  $\alpha$  ,  $\beta$  .  
 $[\alpha = 74^{\circ}44' ; \beta = 40^{\circ}46' ; c = 48,03]$
- 10) Určete velikost největšího vnitřního úhlu v trojúhelníku ABC , je-li a = 74 ; b = 53 ; c = 45 .  
 $[\alpha = 97^{\circ}44']$
- 11) V trojúhelníku ABC je dáno : b = 7 cm ,  $v_b = 3,6$  cm ,  $\alpha = 53^{\circ}$ . Určete a , c ,  $\beta$  ,  $\gamma$  .  
[ ]
- 12) V trojúhelníku ABC je dáno : a = 4 cm ,  $v_a = 2,3$  cm ,  $\beta = 52^{\circ}$ . Určete b , c ,  $\alpha$  ,  $\gamma$  .  
[ ]

Praktické úlohy:

Příklad:

Dvě síly  $F_1 = 35$  N a  $F_2 = 51$  N spolu svírají úhel  $\alpha = 56^{\circ}$ . Určete velikost výslednice F a její úhly s jednotlivými složkami.

Řešení:



Velikost síly F určíme kosinovou větou :

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^{\circ} - \alpha)$$

$$F^2 = 35^2 + 51^2 - 2 \cdot 35 \cdot 51 \cdot \cos 124^{\circ}$$

$$\mathbf{F = 76,3 \text{ N}}$$

Úhly síly F s jednotlivými složkami určíme sinovou větou:

$$\frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{F}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{F_2 \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{F}$$

$$\alpha_1 = 33^\circ 39' \quad \alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 22^\circ 21'$$

Cvičení:

1) Dvě síly  $F_1 = 58 \text{ N}$  a  $F_2 = ?$  spolu svírají úhel  $\alpha = 59^\circ$ . Výslednice  $F = 105 \text{ N}$ . Určete  $F_2$ .  
[63 N]

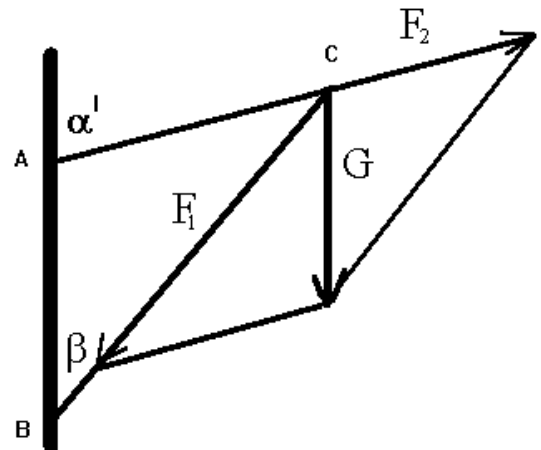
2) Dvě síly  $F_1 = 300 \text{ N}$  a  $F_2 = 400 \text{ N}$  spolu svírají úhel  $\alpha = 40^\circ$ . Určete  $F$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .  
[659 N ; 23° ; 17°]

3) Dvě síly  $F_1 = 130 \text{ N}$  a  $F_2 = 70 \text{ N}$  spolu svírají úhel  $\alpha = 50^\circ$ . Určete  $F$ .  
[183 N]

4) Jaký úhel svírají síly  $F_1 = 80 \text{ N}$  a  $F_2 = 95 \text{ N}$ , je-li jejich výslednice  $F = 152 \text{ N}$ ?  
[59°39']

5) Jaký úhel svírají síly  $F_1 = 80 \text{ N}$  a  $F_2 = 95 \text{ N}$ , je-li jejich výslednice  $F = 88,5 \text{ N}$ ?  
[119°56']

6) Nosník ABC je umístěn na svislé stěně, velikost úhlů:  $\alpha = 72^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ . V bodě C je zatížen břemenem o tíze  $G = 15000 \text{ N}$ . Vypočítejte velikost tahu na rameno AC a tlaku na rameno BC.



7) Dvě síly  $F_1 = 58 \text{ N}$  a  $F_2 = ?$  spolu svírají úhel  $\alpha = 59^\circ$ .  
Výslednice  $F = 105 \text{ N}$ . Určete  $F_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .  
[ 63 N, 30°45', 28° 15']

8) Síla  $F_1 = 210 \text{ N}$  svírá s výslednicí sil  $F$  úhel  $\alpha_1 = 33^\circ$ .  
Velikost síly  $F = 350 \text{ N}$ . Určete  $F_2$  a  $\alpha_2$ .

$$[ 33^\circ 22', 208 \text{ N} ]$$

9) Tlaková síla  $F = 120 \text{ N}$  se má rozdělit na 2 složky  $F_1$ ,  $F_2$ . Tyto složky svírají se silou  $F$  úhly  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ . Jaké jsou složky  $F_1$ ,  $F_2$  ?

$$[ 87,85 \text{ N} , 62,12 \text{ N} ]$$

10) 15 m vysoká budova je vzdálena 30 m od břehu řeky. Z vodorovné střechy této budovy je vidět šířku řeky pod úhlem  $15^\circ$ . Jak široká je řeka?

$$[ 43,3 \text{ m} ]$$

11) Dvě přímé dlužní štoly vycházející z téhož místa C svírají úhel  $100^\circ$ . Délka štoly DC je 80 m. Délka štoly CE je 158 m. Jak dlouhou spojovací štolu DE bude nutno prorazit?

$$[ 189 \text{ m} ]$$

12) Z pozorovatelů PQ vzdálených od sebe 2,8 km bylo pozorováno letadlo L a byly změřeny velikosti úhlů  $\angle LPQ = 76^\circ 30'$  a  $\angle PQL = 62^\circ 10'$ . Jak vysoko bylo letadlo nad základnou PQ v daném okamžiku?

$$[ 3,64 \text{ km} ]$$

13) Máme vypočítat délku tunelu AB, jestliže bylo naměřeno:  $BC = 619,8 \text{ m}$  a  $AC = 437,8 \text{ m}$ ,  $\angle BCA = 97^\circ 45' 36''$ .

$$[ 805,7 \text{ m} ]$$

14) Dvěma lany je ke stropu připevněno břemeno o tíze  $G = 200 \text{ N}$ . Lana jsou stejně dlouhá a svírají s rovinou stropu úhel  $\alpha = 45^\circ$ . Jakými silami jsou obě lana namáhána?

$$[ 141,4 \text{ N} ]$$

15.) Na břehu řeky stojí budova, z jejíchž oken ve vzdálenosti 12 m je vidět bod na druhém břehu ( v rovině kolmé ke směru řeky) v hloubkových úhlech o velikosti  $\alpha = 37^{\circ}57'$  a  $\beta = 25^{\circ}26'$ . Vypočítejte šířku řeky.

[ 39,43 m ]

16.) Sílu o velikosti  $F = 2217,6$  N je třeba rozložit dvě složky , které s ní svírají úhly o velikostech  $\alpha = 46^{\circ}32'$  a  $\beta = 54^{\circ}12'$ . Vypočítejte velikosti složek  $F_1$  a  $F_2$ .

[  $F_1 = 1830,6$  N,  $F_2 = 1638,1$  N ]

17.) Síly o velikostech  $F_1 = 42$  N,  $F_2 = 35$  N působí ve společném bodě a svírají úhel o velikosti  $77^{\circ}12'$ . Jak velká je výsledná síla  $F$  ?

[  $F = 62,35$  N ]

18.) Sílu o velikosti  $F = 300$  N rozložte na složky  $F_1$  a  $F_2$ . První složka svírá se silou  $F$  úhel o velikosti  $47^{\circ}14'$  a druhá úhel o velikosti  $18^{\circ}53'$ . Určete velikosti sil  $F_1$  a  $F_2$ .

[  $F_1 = 106,2$  N ,  $F_2 = 240,9$  N ]

19.) Tři síly, jejichž velikosti jsou v poměru 9: 10: 17, působí v rovině v jednom bodě tak, že jsou v rovnováze. Určete velikosti úhlů, které svírají každé dvě síly.

[  $53^{\circ}08'$  ,  $154^{\circ}57'$  ,  $151^{\circ}55'$  ]

20.) Těleso o hmotnosti  $m = 2000$  kg je zavěšeno dvěma lany různé délky na vodorovné traverze. Lana svírají s traverzou úhly o velikostech  $38^{\circ}26'$  a  $49^{\circ}54'$ . Určete namáhání lan v tahu.

[  $1567,3$  N ;  $1288,8$  N ]

21.) Po rampě se sklonem  $18^{\circ}40'$  je třeba vytlačit těleso tíhy 280 N . Jak velké síly je k tomu třeba a jak velká je tlaková síla působící na rampu, když tření zanedbáváme ?

[  $89,62$  N ;  $265,27$  N ]

22.) Konzola svařená ze dvou nosníků je upevněna na svislé zdi a nese těleso o tíze 1000 N . Jaké síly působí v jejich ramenech, jestliže jedno rameno svírá úhel o velikosti  $35^{\circ}$  a druhé rameno svírá úhel o velikosti  $65^{\circ}$  s rovinou zdi.

[  $1812,6$  N ,  $1147,1$  N ]