

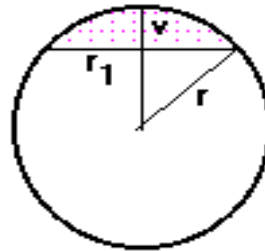
Objem a povrch koule a jejích částí

Celá koule:  $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Kulová úseč:  $V = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot v}{2} + \frac{\pi \cdot v^3}{6}$

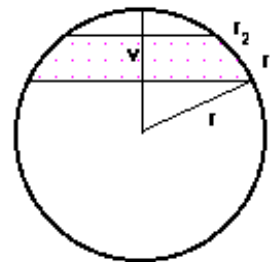
Kulový vrchlík:  $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$



Kulová výseč:  $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$

Kulová vrstva:  $V = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot v}{2} + \frac{\pi \cdot r_2^2 \cdot v}{2} + \frac{\pi \cdot v^3}{6}$

Kulový pás:  $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$



Příklad:

Vypočítejte poloměr železné koule ( $\rho = 7,8$ ) o hmotnosti 7 250 g.

Řešení:

$$\rho = \frac{m}{V} \dots \dots \dots V = \frac{m}{\rho}$$

Nejprve určíme objem koule  $V = \frac{7250}{7,8} = 929,48 dm^3$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Vypočteme r :

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 929,48}{4\pi}}$$

$$r = 6,05$$

Poloměr koule je asi 6 cm

Příklad:

Válcová nádoba o poloměru  $r_1 = 3$  dm je naplněna vodou. Určete, kolik litrů vody vytlačí koule o poloměru  $r = 5$  dm, vložená na válcovou nádobu a jaký je povrch suché části koule.

Řešení:

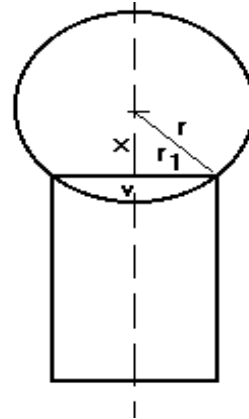
$$r^2 = x^2 + r_1^2 \rightarrow x = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ dm}$$

$$v = 1 \text{ dm}$$

1) objem úseče  $V = \pi r \cdot r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi \frac{v^3}{6}$

$$V = \pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} + \pi \frac{1}{6} = \frac{28}{6} \pi = 14,66 \text{ dm}^3$$

2) obsah vrchlíku  $S = 2\pi \cdot r \cdot v_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 9 = 282,7 \text{ dm}^2$   
 $(v_2 = 2 \cdot r - v)$



Příklad:

Polokulovitá nádoba o poloměru  $r = 12 \text{ cm}$  je naplněna vodou. Kolik litrů vody z ní vyteče, nakloníme-li ji o  $30^\circ$ ?

Řešení:

$$\frac{v}{r} = \sin 30^\circ \rightarrow v = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ cm}$$

$$r_1 = r = 12 \text{ cm}$$

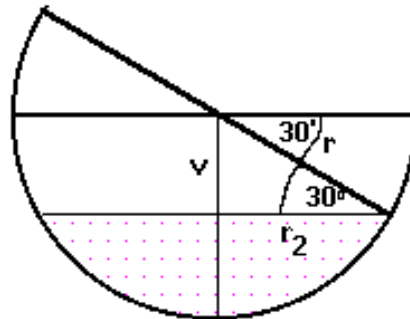
$$r_2 = 12 \cdot \cos 30^\circ$$

$$r_2 = 10,4 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi \cdot r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi \frac{v^3}{6}$$

$$V = \pi \cdot 144 \cdot 3 + \pi \cdot 10,4^2 \cdot 3 + \pi \cdot \frac{6^3}{6}$$

$$V = \pi (432 + 324 + 36) = 2488 \text{ cm}^3 = 2,5 \text{ l}$$



Příklad:

Určete povrch kotle, s rozměry:

Řešení:

$$v = 0,2 \text{ m}$$

$$r_1 = 0,6 \text{ m}$$

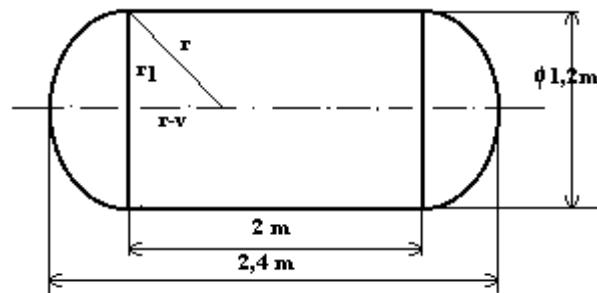
$$r^2 = r_1^2 + (r - v)^2$$

$$r^2 = r_1^2 + r^2 - 2rv + v^2$$

$$r = \frac{r_1^2 + v}{2v} = \frac{0,36 + 0,04}{0,4}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

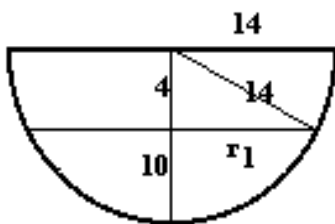
$$S = 2 \cdot 2\pi r v + 2\pi r_1 l = 4\pi \cdot 0,2 + 2\pi \cdot 0,6 \cdot 2 = 2,5 \text{ m}^2 + 7,54 \text{ m}^2 = 10,04 \text{ m}^2$$



Příklad:

Miska tvaru polokoule má vnitřní průměr  $d = 28 \text{ cm}$ . Kolik litrů vody je v misce, naplní-li ji voda do výšky  $10 \text{ cm}$ ?

Řešení:



$$r_1 = \sqrt{196 - 16} = \sqrt{180} = 13,4 \text{ cm}$$

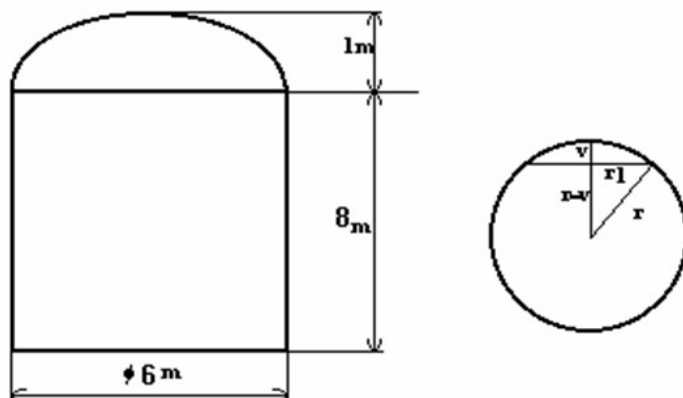
$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} (3r_1^2 + v^2)$$

$$V = \pi \cdot \frac{v}{2} \cdot r_1^2 + \pi \cdot \frac{v^3}{6}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10}{6} (3 \cdot 13,4^2 + 10^2) = 3344 \text{ cm}^3 = 3,34 \text{ dm}^3$$

Příklad:

Továrenská nádrž na lih se skládá z pláště rotačního válce a z kulového vrchlíku. Kolik kg nátěru je třeba na celou nádrž, jestliže na 8,5 m<sup>2</sup> je třeba 1kg?



Řešení:

Výška vrchlíku

$$r^2 = (r - v)^2 + r_1^2$$

$$r^2 = r^2 - 2rv + v^2 + r_1^2$$

$$2rv = v^2 + r_1^2$$

$$r = \frac{v^2 + r_1^2}{2v}$$

$$r = \frac{1 + 9}{2} = 5$$

$$r = 5m$$

$$S = 2\pi rv + 2\pi r_1 \cdot h + \pi \cdot r_1^2$$

$$S = \pi (2rv + 2r_1 h + r_1^2)$$

$$S = \pi (10 + 2 \cdot 3 \cdot 8 + 9)$$

$$S = \pi (19 + 48)$$

$$S = 212m^2$$

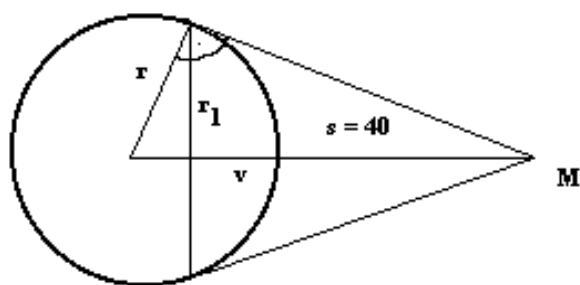
Spotřeba

$$212 : 8,5 = 24,8 \text{ kg} = 25\text{kg}$$

Příklad:

Určete obsah osvětlené plochy na kouli poloměru  $r = 12$  cm, kterou osvětluje svítící bod vzdálený od středu koule 40 cm.

Řešení:



$$r^2 = s(r - v)$$

$$r^2 = sr - sv$$

$$r^2 - sr = -sv$$

$$v = \frac{sr - r^2}{s} = \frac{r(s - r)}{s}$$

$$v = \frac{12 \cdot 28}{40} = \frac{28 \cdot 3}{10} = \frac{84}{10} = 8,4 \text{ cm}$$

$$S = 2\pi rv = 2\pi \cdot 12 \cdot 8,4 = 633,3 \text{ cm}^2$$

Cvičení:

- 1.) Vypočítejte objem a povrch koule, jsou-li dány poloměry dvou rovnoběžných řezů  $r_1 = 28$  cm,  $r_2 = 8$  cm a jejich vzdálenost  $v = 15$  cm.

$$[ V = 143\,790 \text{ cm}^3 ; S = 13\,273 \text{ cm}^2 ]$$

- 2.) Koule o poloměru 12 cm je protřata rovinou ve vzdálenosti 4 cm od středu koule . Vypočtete povrch a objem příslušné kulové úseče.  
 $[ S = 1\,005,31 \text{ cm}^2 ; V = 1\,876,6 \text{ cm}^3 ]$
- 3.) Rovina protne kouli o poloměru  $r = 9,8 \text{ dm}$  v kruhu o poloměru  $r_1 = 7,9 \text{ dm}$ . Vypočtete povrch a objem příslušné kulové úseče.  
 $[ S = 442,37 \text{ dm}^2 ; V = 425,85 \text{ dm}^3 ]$
- 4.) Vypočtete povrch kulového pásu, který vznikne z kulové plochy o poloměru  $r = 26 \text{ cm}$ ; poloměry kružnic, v nichž rovnoběžné roviny protínají kulovou plochu , jsou  $r_1 = 13,2 \text{ cm}$  a  $r_2 = 10 \text{ cm}$ .  
 $[ S = 261,38 \text{ cm}^2 ]$
- 5.) Jak daleko od středu koule je svítící bod , je-li osvětlena čtvrtina koule?  
 $[ x = 2r ]$
- 6.) Stanovte velikost povrchu zemského , který lze spatřit z letadla letícího ve výšce  $h = 3000 \text{ m}$ . ( poloměr Země  $r = 6370 \text{ km}$ )  
 $[ 120\,000 \text{ km}^2 ]$
- 7.) Určete povrch a hmotnost dvojbypuklé čočky o průměru  $10 \text{ cm}$  , je-li poloměr křivosti jedné kulové plochy  $10 \text{ cm}$ , poloměr druhé  $8 \text{ cm}$  . (  $\rho = 3,5 \text{ g/cm}^3$ )  
 $[ S = 172 \text{ cm}^2 ; V = 124,7 \text{ cm}^3 ; m = 440 \text{ g} ]$
- 8.) Ploskovypuklá skleněná čočka má poloměr  $r = 5,4 \text{ cm}$ , tloušťku  $t = 1,2 \text{ cm}$  , hmotnost  $m = 139,613 \text{ g}$ . Určete hustotu skla, z něhož je zhotovena.  
 $[ \rho = 2,48 \text{ g/cm}^3 ]$
- 9.) Kulová úseč, jejíž výška  $v = 5 \text{ cm}$  má objem  $V = 850 \text{ cm}^3$ . Určete velikost poloměru koule  $r$ , ze které úseč vznikla.  
 $[ 12,5 ]$
- 10.) Určete objem kulové vrstvy, která vznikne z polokoule o poloměru  $r = 5 \text{ cm}$  odříznutím úseče , jejíž výška  $v = 1,5 \text{ cm}$ .  
 $[ 230 ]$
- 11.) Válcová nádoba , jejíž podstava má poloměr  $r = 8 \text{ cm}$ , je naplněna zčásti vodou. O kolik cm vystoupí voda v nádobě, vhodí-li se do ní koule o poloměru  $r' = 6 \text{ cm}$  ?  
 $[ 4,5 \text{ cm} ]$
- 12.) Nádoba tvaru duté polokoule je naplněna vodou. Nakloníme-li ji o  $30^\circ$ , vyteče z ní 11 litrů vody. Kolik litrů vody zbývá v nádobě?  
 $[ 5 \text{ litrů} ]$
- 13.) Bronzový podstavec má tvar kulové vrstvy. Jeho výška je  $1 \text{ dm}$ , poloměry podstav  $4 \text{ dm}$  a  $3 \text{ dm}$  a poloměr příslušné koule  $r = 5 \text{ dm}$  . Vypočtete jeho hmotnost a povrch. Hustota bronzu je  $8\,800 \text{ kg.m}^{-3}$ .  
 $[ 350 \text{ kg} , 110 \text{ dm}^2 ]$
- 14.) Kolik  $\text{m}^2$  plechu je třeba na výrobu kotle tvaru polokoule s víkem o průměru  $1,6 \text{ m}$ , přičteme-li  $15\%$  na spoje a odpad? Vypočtete objem vody v tomto kotli v hektolitrech, sahá -li voda do výšky  $60 \text{ cm}$ .  
 $[ 6,9 \text{ m}^2 , 6,79 \text{ hl} ]$
- 15.) Vnitřní povrch vodojemu tvaru koule je  $707 \text{ dm}^2$ . Pojme  $18 \text{ hl}$  vody?  
 $[ \text{ne} ]$