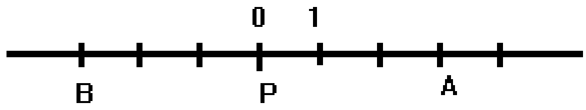
15s

Analytická geometrie lineárních útvarů

1) Na přímce:

a) Souřadnice bodu na přímce:



Bod P nazýváme počátek - jeho souřadnice je P =[0]
Nalevo od počátku leží čísla záporná, napravo čísla kladná. Každý bod má pouze jednu souřadnici.
Souřadnice bodů: A = [3] ; B = [-3]

b) Vzdálenost dvou bodů na přímce:
Je-li A = [x_A] ; B = [x_B] , pak jejich vzdálenost **$|AB| = | x_A - x_B |$**

Příklad:
Na přímce jsou dány body A = [-4] ; B = [3]. Určete jejich vzdálenost.
Řešení:
$|AB| = |-4 -3| = 7$
Doplňte příklad obrázkem.

c) Střed úsečky na přímce:
Je-li A = [x_A] ; B = [x_B] , pak jejich střed má souřadnici S = [x_S] a platí:

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Příklad:
Určete střed úsečky AB s krajními body A = [-2] ; B = [8] .
Řešení:

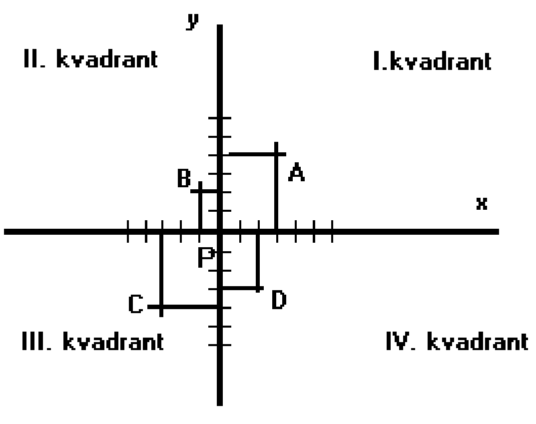
Střed S = [x_S] $x_S = \frac{-2+8}{2} = 3$ S = [3]

Doplňte příklad obrázkem.

2)V rovině:

V rovině je dán souřadný systém s dvěma kolmými osami x , y . Jejich průsečík nazveme počátek.

Souřadnice bodu v rovině:

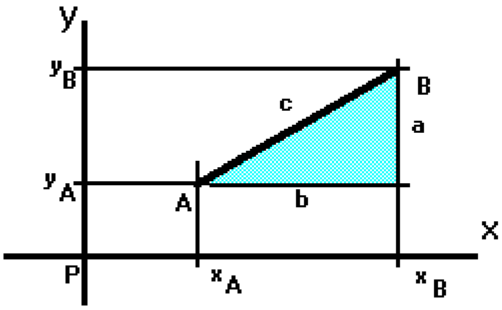


Každý bod má v rovině dvě souřadnice - 1. x - ovou ; 2. y - ovou

$A = [3,4]$, $B = [-1,2]$, $C = [-3,-4]$, $D = [2,-3]$

Vzdálenost dvou bodů v rovině:

Je dán bod $A = [x_A,y_A]$ a bod $B = [x_B,y_B]$. Jejich vzdálenost určíme z obrázku:



Platí Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$
$a = |y_A - y_B|$
$b = |x_A - x_B|$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Příklad:
V rovině jsou dány body $X = [5,-2]$, $Y = [-1, 4]$. Určete jejich vzdálenost.

Řešení:

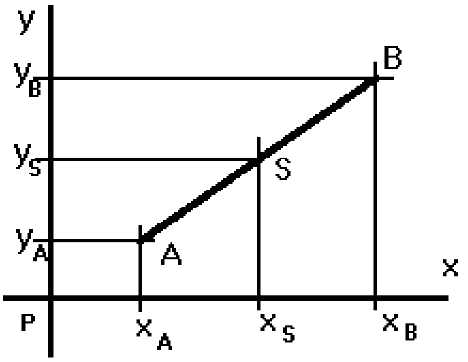
$$|XY| = \sqrt{(-1-5)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Doplňte příklad obrázkem.

Cvičení:
1. Je dán trojúhelník ABC : $A = [1,-2]$; $B = [-3 , 1]$; $C = [4 , 2]$. Dokažte, že je rovnoramenný a pravoúhlý.
2. Vypočtěte velikost obvodu trojúhelníku ABC : $A = [-2,5;-6]$; $B = [5; 0,5]$; $C = [9 ; -8,2]$.
   [31,20]

Střed úsečky v rovině:

Je dána úsečka s krajními body $A = [x_A,y_A]$ a $B = [x_B,y_B]$. Jejím středem je bod $S = [x_S ,y_S]$ a platí:



$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_s = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Příklad:
Vypočtěte souřadnice středu úsečky CD , je-li $C = [5,4]$, $D = [-3,-2]$.
Řešení:

$$x_S = \frac{5-3}{2} = 1 \quad y_S = \frac{4-2}{2} = 1$$

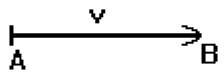
$S = [1,1]$.
Doplňte příklad obrázkem.

Cvičení:

1. Určete velikosti středních příček trojúhelníku ABC ,kde A = [-4,2] ; B = [4,-4] ; C = [2,5] .
   [5 ; 4,6098 ; 3,354]
2. K bodu A = [2,5] určete bod B souměrně sdružený podle osy x.
   [B = [2,-5]]
3. Najděte střed kružnice opsané trojúhelníku ABC : A = [2,-1] , B = [5,-2] ; C = [10,3].
   [S = [5,3]]

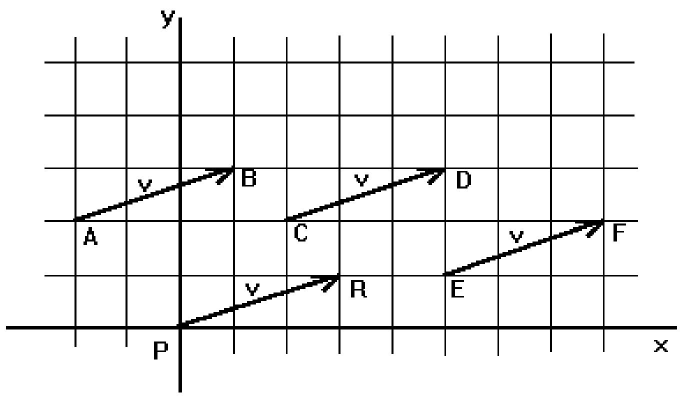
Vektory v rovině:

Vektor = orientovaná úsečka (ve fyzice např. síla , rychlost)



vektor AB - A - počáteční bod ; B - koncový bod

Souřadnice vektoru:



Na obrázku jsou zobrazeny čtyři vektory. Jsou rovnoběžné, stejně velké a stejně orientované - říkáme, že se jedná o různá umístění téhož vektoru.

Jedná se tedy o jeden vektor **v** umístěný v různých bodech.

Souřadnice vektoru určíme tak, že jeho počáteční bod umístíme do počátku souřadného systému a souřadnice vektoru budou souřadnicemi koncového bodu.

v = (3,1)

Je -li vektor **v** umístěn do bodů A = [x_A,y_A] a B = [x_B,y_B] kde A je bod počáteční a B bod koncový , pak jeho souřadnice určíme takto:

$$v = (v_1,v_2) = (x_B - x_A,\ y_B - y_A)$$

Příklad:

Určete souřadnice vektoru v = AB , kde A = [2,6] a B = [8,2].

Řešení:

v = (8 - 2 , 2 - 6) = (6 , -4)

Doplňte příklad obrázkem.

Příklad : Rozhodněte , zda orientované úsečky **AB , CD** jsou umístěním téhož vektoru :

a) A = [-5; 3] , B = [2 ; -1] , C= [-3; 1] ,D = [4; -3]
   Návod : Vypočteme souřadnice jednotlivých vektorů a zjistíme, zda jsou shodné .
   AB = (7 , - 4) , **CD** = (7, -4) ano
b) [-1;-6] , B= [-3 : -1] , C = [-3;-1] , D = [-1;-6]

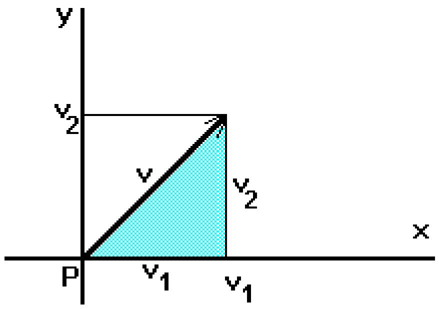
***AB** = (-2, 5) , **CD** = (2 , - 5) ne*

Příklad : Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky AB, CD představovaly
týž vektor : A – [-7;1] , B = [1; 7] ; C = [-2;-3] , D = [?; ?]
Návod : Napíšeme symbolické rovnice pro rovnost vektorů a dosadíme.
AB = CD
B – A = D – C

$1 - (-7) = d_1 - (-2)$ $\qquad$ $7 - 1 = d_2 - (-3)$
$8 = d_1 + 2$ $\qquad$ $6 = d_2 + 3$
$d_1 = 6$ $\qquad$ $d_2 = 3$ $\qquad$ D = [6 ; 3]

Velikost vektoru:

Je -li dán vektor $v = (v_1 , v_2)$, pak jeho velikost určíme následujícím způsobem:



$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Příklad:
Určete velikost vektoru v = (4,3).

Řešení:
$v = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
Doplňte příklad obrázkem.

Příklad : Zakreslete vektory **AB , CD , EF** , určete jejich souřadnice a velikost :
A = [1; 2] , B = [5 ; 4] , C = [2 ; - 3] , D = [1 ; 2] , E = [5 ; 0] , F = [- 2 ; - 3]

$v_1 = x_B - x_A = 5 - 1 = 4$ $\qquad$ $v_1 = -1 -2 = -3$ $\qquad$ $v_1 = -2 - 5 = -7$
$v_2 = y_B - y_C = 4 - 2 = 2$ $\qquad$ $v_2 = 2 - (-3) = 5$ $\qquad$ $v_2 = -3 - 0 = -3$
v=(4 , 2) $\qquad$ **v = (- 3, -5)** $\qquad$ **v = (- 7 , - 3)**
$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ $\qquad$ $|v| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ $\qquad$ $|v| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{54}$

Operace s vektory:

a) Součet vektorů:
Je dán vektor $v = (v_1,v_2)$ a vektor $u = (u_1,u_2)$. Jejich součtem u + v je vektor $w = (v_1+ u_1, v_2+ u_2)$.

b) Součin čísla a vektoru:
Je dán vektor $v = (v_1,v_2)$ a reálné číslo k . Jejich součinem k.v je vektor $w =(k.v_1, k.v_2)$.

c) Skalární součin vektorů:
Je dán vektor $v = (v_1,v_2)$ a vektor $u = (u_1,u_2)$. Jejich skalárním součinem $u \circ v$ je číslo :

$$u \circ v = u_1.\, v_1 + u_2.\, v_2$$

Skalární součin vektorů nelze zobrazit.

Příklad:
Jsou dány vektory v = (2,-3) , u = (5,6). Určete u + v , 4.v , $u \circ v$.

Řešení:
w = u + v = (2+5, -3+6) = (7, 3)
4.v = (4.2, 4. (-3)) = (8 , -12)
$u \circ v$ = 2.5 + (-3).6 = 10 - 18 = -8

Úhel dvou vektorů:

Úhel dvou vektorů určíme z tohoto vzorce

$$\cos\alpha = \frac{|u \circ v|}{|u|.|v|}$$

tedy po dosazení

$$\cos\alpha = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

<u>Příklad:</u>
Určete úhel vektoru u = (-4,2) a vektoru v = (2, 3).
<u>Řešení:</u>

Dosadíme do vzorce : $\cos\alpha = \frac{-4.2+2.3}{\sqrt{16+4}.\sqrt{4+9}} = \frac{-8+6}{\sqrt{20.13}} = \frac{-2}{\sqrt{260}} = -0{,}124034$

$\alpha = 97°07'$

Doplňte příklad obrázkem.

Je - li u o v = 0 pak vektory u a v jsou navzájem kolmé !

<u>Příklad:</u> Určete velikosti úhlů. které svírají úhlopříčky čtyřúhelníku ABCD :
A = [-3; 2] , B = [2 ; -4] , C = [7 ; -1] , D = [5 ; 4]

Vypočteme např. úhel vektorů **AC** , **BD** (určíme souřadnice těchto vektorů, jejich velikosti a dosadíme do vzorce) :

AC = C – A = (10, -3) $|AC| = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$ _

BD = D – B = (3 , 8) $|BD| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

$\cos\varphi = \frac{30 - 24}{\sqrt{109}.\sqrt{73}} = 0{,}06726$ $\varphi = 86^0\ 8'$

$\varepsilon = 180^0 - 86^0\ 8' = 93^0\ 52'$

<u>Příklad:</u> Zjistěte, zda vektory **AB, CD** jsou navzájem kolmé (A = [4; 0] , B =[-6;4],
C= { 1;7] , D = [-3;-3]
Určíme souřadnice vektorů AB = B-A = (-10, 4) , CD = D – C = (-4 , - 10) a dosadíme do podmínky pro kolmost vektorů : -10. (-4) + 4 .(-10) = 40- 40= 0 jsou kolmé

<u>Příklad :</u> Rozhodněte , zda trojúhelník ABC je pravoúhlý (pravý úhel u vrcholu C)
A=[-1;6],B=[2;-1],C=[-3;1]
Návod: zjistíme, zda vektory **CA , CB** jsou navzájem kolmé
CA = A – C = (-2 , -5) , CB = B-C = (5 , -2) (-2).5 + (-5) . (-2) = -10 + 10= 0
ano

Lineární závislost a nezávislost vektorů:

a) Dva vektory
Vektory **u** a **v** jsou lineárně závislé , právě když existuje reálné číslo **k** tak že platí **u = k.v**
Příklad závislých vektorů: u = (-1 , 2) v = (2 , -4) - platí u = (-0,5).v číslo k = -2

b) Tři vektory
Vektory **u, v, w** jsou lineárně závislé právě když existují reálná čísla **m , n** tak, že platí **w = m.u + n.v**
Příklad závislých vektorů: u = (-1 , 2) v = (3 , -4) w = (7, -8)

platí: 7 = -1.m + 3.n /.2
<u>- 8 = 2.m + (-4)n</u>
14 = -2.m + 6.n
<u>- 8 = 2.m - 4.n</u> rovnice sečteme
6 = 2.n
n =3 m = 3.n - 7 = 9-7 = 2

Vektory jsou lineárně závislé a platí: w = 2.u + 3.v

Vektor **w** nazýváme lineární kombinací vektorů **u** a **v**.
Studovat závislost a nezávislost 3 vektorů můžeme pouze v prostoru. V rovině platí, že 3 vektory jsou vždy závislé.

Cvičení:

1. Rozhodněte, zda orientované úsečky AB,CD , jsou umístěním téhož vektoru, jestliže
   a) A=[1; 2] , B = [-3; -1] , C = [11 ; -1] , D =[7 ; -4] (ano)
   b) A = [3; -2] , B = [-5; -4] , C = [-11; 5] , D = [-3; 7] (ne)
2. Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky AB , CD byly umístěním téhož vektoru :
   a) A = [-1;2] , B = [3; -5] , C = [5; -7] D = [9; - 14]
   b) A= [-5;-7] , B = [-3;-4] , C = [1;2] D = [3 ; 5]
3. Určete velikosti úhlů, které svírají úhlopříčky čtyřúhelníku ABCD :
   a) A= [-3;1] , B = [3 ; 9] , C = [7 ; 6] , D = [-2; 6] $175^0 36'$, $4^0 24'$
   b) A = [1; 2] , B = [-3 ; -1] , C = [7 ; 4] , D = [11; -1] $18^0 27'$, $171^0 33'$
4. Dokažte , že trojúhelník ABC je pravoúhlý : (zjistěte, zda vektory CA,CB jsou navzájem kolmé :
   a) A = [4; -1] , B = [3; 4] , C = [1 ; 2] ano
   b) A = [-1 ; 6] , B = [10; 7] , C = [5; 1] ano

Určete souřadnice vektoru v = AB , kde A = [2,-3] ; B = [6,7].
[v = (4,10)]

5. V soustavě souřadnic jsou dány body A = [2,7] ; B = [-4,1]; C = $\left[\frac{13}{2};1\right]$. D = $\left[\frac{1}{2};-5\right]$. Jsou vektory $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}$ umístěním téhož vektoru?
   [ano]
6. V soustavě souřadnic jsou dány body A = [-2,0]; B = [2,4]; C = $\left[-3;-\frac{2}{3}\right]$; D = $\left[1;\frac{5}{3}\right]$; E = [2,-2] ; F = [6,2].
   Zjistěte, zda jsou si rovny vektory a) $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EF}$; c) $\overrightarrow{CD};\overrightarrow{EF}$
   [a) ne; b) ano; c) ne]
7. Jsou dány body A = [4,0] ; B = [5,-2]; D = $\left[\frac{4}{5};-\frac{15}{2}\right]$. Určete bod C tak, aby vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BD}$ byly umístěním téhož vektoru u.
   [C = [-0,2;-5,5]]
8. Určete skalární součin vektorů u = (-2 , 6) ; v = (3,-5).
   [-36]
9. Určete úhel vektorů u = (-6,8) v = (2, -4).
   [169°41´]
10. Je dán vektor v = (-2,3) a vektor u = AB , A = [7,1] , B = [-1,3] . Určete jejich úhel.
    [42°17´]
11. Rozhodněte, zda jsou kolmé vektory u = (-5,3); v = (-6 , -10)
    [ano]
12. Určete koeficienty lineární závislosti vektorů u = (-2,6) ; v = (3, -6) a w = (8, -18).
    [-1 ; 2]
13. Rozhodněte, zda jsou kolmé vektory a = (6,-6) ; b = (18, 18).
    [ano]
14. Najděte alespoň jeden vektor v tak, aby s vektorem u = (2,-1) byly kolmé.
15. Trojúhelník ABC má vrcholy A = [-5,2] ; B = [1,5]. Určete souřadnici vrcholu C , jestliže vektor u = AC = (3,-4). Dále určete velikosti vektorů u = AC ; v = AB ; w = BC .
    [C = [-2,-2] , $|u| = 5; |v| = 3.\sqrt{5}; |w| = \sqrt{58}$]
16. Rovnoběžník ABCD má vrcholy A = [0,0] ; B = [8,-2] ; C = [12,4] . Určete souřadnice vrcholu D.
    [D = [4,6]]
17. Vektor v = AB , A = [-2,1]; B = [1,5] , vektor u = AC , C = [7,-3] . Určete úhel α vektorů u a v.
    [α = 77°03´]
18. Je dán trojúhelník ABC : A = [7,-3] ; B = [-2,1]; C = [1,5] . Určete úhel β.
    [β = 77°03´]
19. Je dán rovnoběžník ABCD , A = [3,3] ; B = [2,7]; C = [7,5]. Určete souřadnice vrcholu D a úhel jeho úhlopříček.

    [D = [8,1] , γ = 71°34´]
20. Jsou dány body : A = [0,3] ; B = [-3,-3]; C = [4,11]. Leží tyto body v jedné přímce?
    [ano]