

15_t

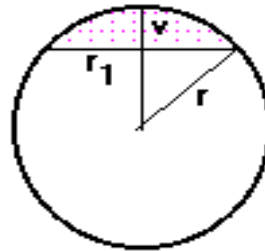
Objem a povrch koule a jejích částí

Celá koule: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Kulová úseč: $V = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot v}{2} + \frac{\pi \cdot v^3}{6}$

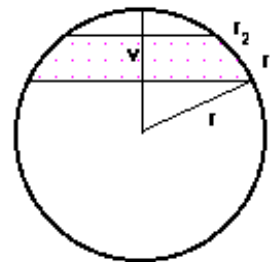
Kulový vrchlík: $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$



Kulová výseč: $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$

Kulová vrstva: $V = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot v}{2} + \frac{\pi \cdot r_2^2 \cdot v}{2} + \frac{\pi \cdot v^3}{6}$

Kulový pás: $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$



Příklad:

Vypočítejte poloměr železné koule ($\rho = 7,8$) o hmotnosti 7 250 g.

Řešení:

$$\rho = \frac{m}{V} \dots \dots \dots V = \frac{m}{\rho}$$

Nejprve určíme objem koule $V = \frac{7250}{7,8} = 929,48 dm^3$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Vypočteme r :

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 929,48}{4\pi}}$$

$$r = 6,05$$

Poloměr koule je asi 6 cm

Příklad:

Válcová nádoba o poloměru $r_1 = 3$ dm je naplněna vodou. Určete, kolik litrů vody vytlačí koule o poloměru $r = 5$ dm, vložená na válcovou nádobu a jaký je povrch suché části koule.

Řešení:

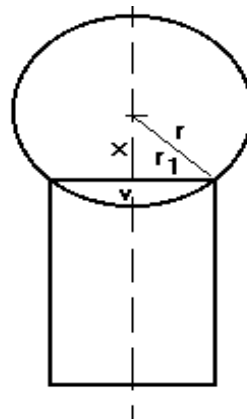
$$r^2 = x^2 + r_1^2 \rightarrow x = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ dm}$$

$$v = 1 \text{ dm}$$

1) objem úseče $V = \pi r \cdot r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi \frac{v^3}{6}$

$$V = \pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} + \pi \frac{1}{6} = \frac{28}{6} \pi = 14,66 \text{ dm}^3$$

2) obsah vrchlíku $S = 2\pi \cdot r \cdot v_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 9 = 282,7 \text{ dm}^2$
 $(v_2 = 2 \cdot r - v)$



Příklad:

Polokulovitá nádoba o poloměru $r = 12 \text{ cm}$ je naplněna vodou. Kolik litrů vody z ní vyteče, nakloníme-li ji o 30° ?

Řešení:

$$\frac{v}{r} = \sin 30^\circ \rightarrow v = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ cm}$$

$$r_1 = r = 12 \text{ cm}$$

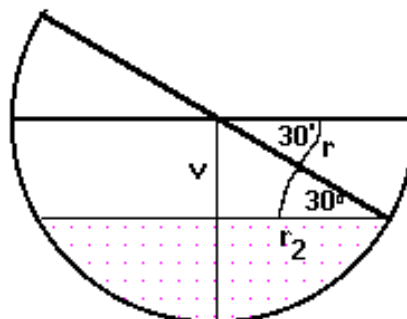
$$r_2 = 12 \cdot \cos 30^\circ$$

$$r_2 = 10,4 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi \cdot r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi \frac{v^3}{6}$$

$$V = \pi \cdot 144 \cdot 3 + \pi \cdot 10,4^2 \cdot 3 + \pi \cdot \frac{6^3}{6}$$

$$V = \pi (432 + 324 + 36) = 2488 \text{ cm}^3 = 2,5 \text{ l}$$



Příklad:

Určete povrch kotle, s rozměry:

Řešení:

$$v = 0,2 \text{ m}$$

$$r_1 = 0,6 \text{ m}$$

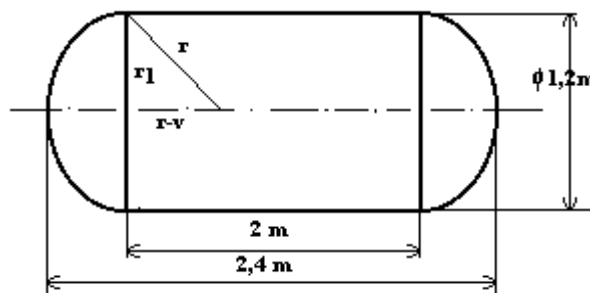
$$r^2 = r_1^2 + (r - v)^2$$

$$r^2 = r_1^2 + r^2 - 2rv + v^2$$

$$r = \frac{r_1^2 + v}{2v} = \frac{0,36 + 0,04}{0,4}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

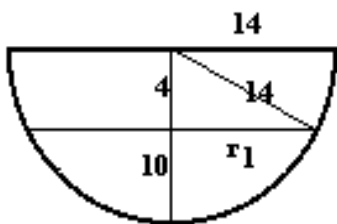
$$S = 2 \cdot 2\pi r v + 2\pi r_1 l = 4\pi \cdot 0,2 + 2\pi \cdot 0,6 \cdot 2 = 2,5 \text{ m}^2 + 7,54 \text{ m}^2 = 10,04 \text{ m}^2$$



Příklad:

Miska tvaru polokoule má vnitřní průměr $d = 28 \text{ cm}$. Kolik litrů vody je v misce, naplní-li ji voda do výšky 10 cm ?

Řešení:



$$r_1 = \sqrt{196 - 16} = \sqrt{180} = 13,4 \text{ cm}$$

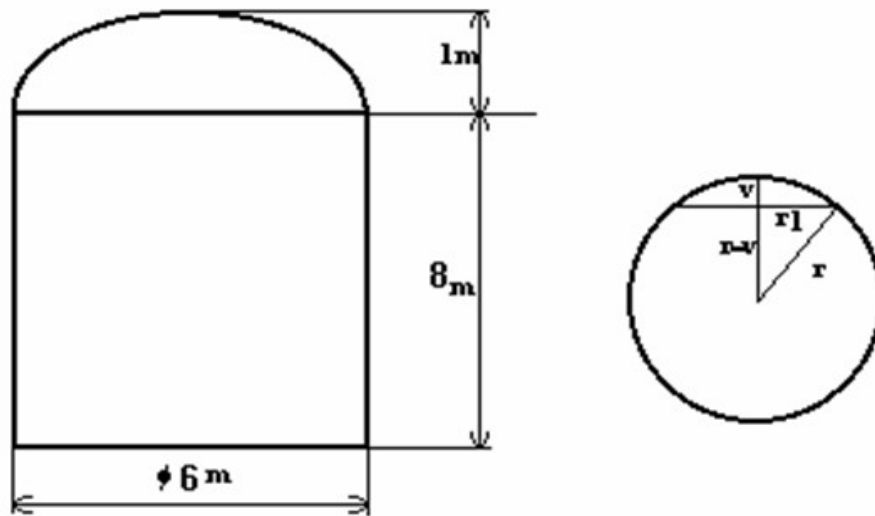
$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} (3r_1^2 + v^2)$$

$$V = \pi \cdot \frac{v}{2} \cdot r_1^2 + \pi \cdot \frac{v^3}{6}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10}{6} (3 \cdot 13,4^2 + 10^2) = 3344 \text{ cm}^3 = 3,34 \text{ dm}^3$$

Příklad:

Továrenská nádrž na lih se skládá z pláště rotačního válce a z kulového vrchlíku. Kolik kg nátěru je třeba na celou nádrž, jestliže na 8,5 m² je třeba 1kg?



Řešení:

Výška vrchlíku

$$r^2 = (r - v)^2 + r_1^2$$

$$r^2 = r^2 - 2rv + v^2 + r_1^2$$

$$2rv = v^2 + r_1^2$$

$$r = \frac{v^2 + r_1^2}{2v}$$

$$r = \frac{1 + 9}{2} = 5$$

$$r = 5m$$

$$S = 2\pi rv + 2\pi r_1 \cdot h + \pi \cdot r_1^2$$

$$S = \pi (2rv + 2r_1 h + r_1^2)$$

$$S = \pi (10 + 2 \cdot 3 \cdot 8 + 9)$$

$$S = \pi (19 + 48)$$

$$S = 212m^2$$

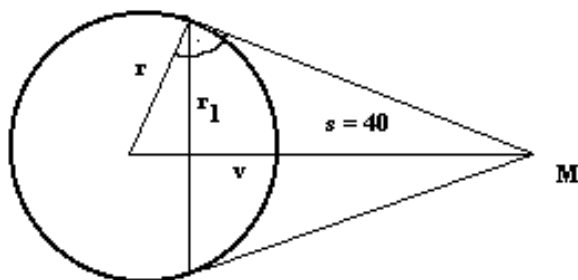
Spotřeba

$$212 : 8,5 = 24,8 \text{ kg} = 25\text{kg}$$

Příklad:

Určete obsah osvětlené plochy na kouli poloměru $r = 12 \text{ cm}$, kterou osvětluje svítící bod vzdálený od středu koule 40 cm .

Řešení:



$$r^2 = s(r - v)$$

$$r^2 = sr - sv$$

$$r^2 - sr = -sv$$

$$v = \frac{sr - r^2}{s} = \frac{r(s - r)}{s}$$

$$v = \frac{12 \cdot 28}{40} = \frac{28 \cdot 3}{10} = \frac{84}{10} = 8,4 \text{ cm}$$

$$S = 2\pi rv = 2\pi \cdot 12 \cdot 8,4 = 633,3 \text{ cm}^2.$$

Cvičení:

- 1.) Vypočtete objem a povrch koule, jsou-li dány poloměry dvou rovnoběžných řezů $r_1 = 28$ cm , $r_2 = 8$ cm a jejich vzdálenost $v = 15$ cm.
[$V = 143\,790$ cm³ ; $S = 13\,273$ cm²]
- 2.) Koule o poloměru 12 cm je prořazena rovinou ve vzdálenosti 4 cm od středu koule . Vypočtete povrch a objem příslušné kulové úseče.
[$S = 1\,005,31$ cm² ; $V = 1\,876,6$ cm³]
- 3.) Rovina protne kouli o poloměru $r = 9,8$ dm v kruhu o poloměru $r_1 = 7,9$ dm. Vypočtete povrch a objem příslušné kulové úseče.
[$S = 442,37$ dm² ; $V = 425,85$ dm³]
- 4.) Vypočtete povrch kulového pásu, který vznikne z kulové plochy o poloměru $r = 26$ cm; poloměry kružnic, v nichž rovnoběžné roviny protínají kulovou plochu , jsou $r_1 = 13,2$ cm a $r_2 = 10$ cm.
[$S = 261,38$ cm²]
- 5.) Jak daleko od středu koule je svítící bod , je-li osvětlena čtvrtina koule?
[$x = 2r$]
- 6.) Stanovte velikost povrchu zemského , který lze spatřit z letadla letícího ve výšce $h = 3000$ m. (poloměr Země $r = 6370$ km)
[$120\,000$ km²]
- 7.) Určete povrch a hmotnost dvojbypuklé čočky o průměru 10 cm , je-li poloměr křivosti jedné kulové plochy 10 cm, poloměr druhé 8 cm . ($\rho = 3,5$ g/ cm³)
[$S = 172$ cm² ; $V = 124,7$ cm³ ; $m = 440$ g]
- 8.) Ploskovypuklá skleněná čočka má poloměr $r = 5,4$ cm, tloušťku $t = 1,2$ cm , hmotnost $m = 139,613$ g. Určete hustotu skla, z něhož je zhotovena.
[$\rho = 2,48$ g/cm³]
- 9.) Kulová úseč, jejíž výška $v = 5$ cm má objem $V = 850$ cm³. Určete velikost poloměru koule r , ze které úseč vznikla.
[12,5]
- 10.) Určete objem kulové vrstvy, která vznikne z polokoule o poloměru $r = 5$ cm odříznutím úseče , jejíž výška $v = 1,5$ cm.
[230]
- 11.) Válcová nádoba , jejíž podstava má poloměr $r = 8$ cm, je naplněna zčásti vodou. O kolik cm vystoupí voda v nádobě, vhodí-li se do ní koule o poloměru $r' = 6$ cm ?
[4,5cm]
- 12.) Nádoba tvaru duté polokoule je naplněna vodou. Nakloníme-li ji o 30°, vyteče z ní 11 litrů vody. Kolik litrů vody zůstává v nádobě?
[5 litrů]
- 13.) Bronzový podstavec má tvar kulové vrstvy. Jeho výška je 1 dm, poloměry podstav 4 dm a 3 dm a poloměr příslušné koule $r = 5$ dm . Vypočtete jeho hmotnost a povrch. Hustota bronzu je 8 800kg.m⁻³.
[350 kg , 110 dm²]
- 14.) Kolik m² plechu je třeba na výrobu kotle tvaru polokoule s víkem o průměru 1,6 m, přičteme-li 15 % na spoje a odpad? Vypočtete objem vody v tomto kotli v hektolitrech, sahá -li voda do výšky 60cm.
[6,9 m² , 6,79 hl]
- 15.) Vnitřní povrch vodojemu tvaru koule je 707 dm². Pojme 18 hl vody?
[ne]