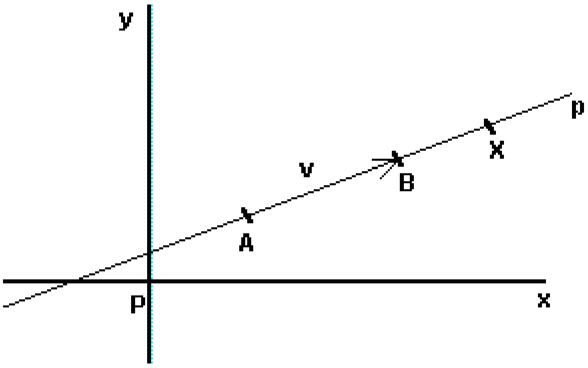
16_s

Analytická geometrie přímky – rovnice přímky, vzájemná poloha přímek, odchylka přímek, průsečík přímek, vzdálenost přímky od roviny

Parametrické vyjádření přímky v rovině

Přímka je jednoznačně určena dvěma různými body . K nalezení parametrické rovnice přímky potřebujeme mít dán jeden bod a vektor (směrový vektor přímky).



Přímka je množina bodů X . Každý bod X= [x,y] na přímce p dostaneme tak , že k bodu A = $[a_1,a_2]$ přičteme **t** násobek vektoru **v**.

Tedy $X = A + t.v$ po rozepsání do souřadnic dostaneme parametrickou rovnici přímky:

p : $x = a_1 + t.v_1$

$y = a_2 + t.v_2$ kde t je parametr

Příklad:

Napište parametrickou rovnici přímky , určené bodem A = [3,4] a vektorem v = (2,5).

Řešení:

p: $x = 3 + 2.t$

$y = 4 + 5.t$

Příklad:

Napište parametrickou rovnici přímky určené bodem A = [5,6] a bodem B = [7,7].

Řešení:

Z dvojice bodů A,B nejprve určíme vektor AB = u = (2,1).

p: $x = 5 + 2.t$

$y = 6 + t$

Příklad:

Je dána přímka p: x = 5 + 2.t ; y = 6 + t . Určete zda na této přímce leží bod K = [1,4] a bod M = [3,6].

Řešení:

Leží-li bod na přímce, pak jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici přímky.

K : $1 = 5 + 2.t \Rightarrow t = -2$

$4 = 6 + t \Rightarrow t = -2$

Protože vyšlo v obou rovnicích stejné t , bod K leží na přímce p.

M: $3 = 5 + 2.t \Rightarrow t = -1$

$6 = 6 + t \Rightarrow t = 0$

Protože vyšlo v obou rovnicích různé t , bod M neleží na přímce p.

Cvičení:

1. Napište parametrickou rovnici přímky určené bodem P = [3 , -8] a směrovým vektorem v = (3 , 4).
   [x = 3+3t , y = -8+4t]
2. Napište parametrickou rovnici přímky určené bodem A = [6 , 3]a bodem B = [3 ,- 2]
   [x = 6-3t , y = 3-5t]

3. Jsou dány tři body A = [-4 , 2], B = [2 , 0], C = [1 , 6] . Tyto body tvoří trojúhelník .Napište parametrické rovnice těžnic trojúhelníku ABC.

$$\left[x = -4 + \frac{11}{2}t; y = 2 + t \quad x = 2 - \frac{7}{2}k; y = 4k \quad x = 1 - 2m; y = 6 - 5m \right]$$

4. Jsou dány body A = [-3 , 0], B = [1 , 4]. Určete vzájemnou polohu přímky určené body A a B s přímkou p: x = 2-4t , y = -1+4t.

Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky v rovině má tvar: **ax + by + c = 0**

kde a , b, c jsou reálná čísla .
Vektor n = (a, b) je vektor kolmý k přímce, říkáme mu vektor normálový.

Obecnou rovnici přímky získáme z parametrické rovnice tak, že obě rovnice vynásobíme takovými čísly, aby po jejich sečtení vypadl parametr t .

Příklad:
Přímku p : x = 5 + 2.t ; y = 6 + t převeďte na obecný tvar.

Řešení:
p : x = 5 + 2.t
y = 6 + t /.(-2)
x = 5 + 2t
-2y= -12-2t rovnice sečteme
x -2y = -7
p: x - 2y +7 = 0

- Máme-li dány dva body a chceme sestavit obecnou rovnici přímky určené těmito body , můžeme postupovat dvěma způsoby:
  1) Sestavíme nejprve parametrickou rovnici přímky a postupem z předchozího příkladu přejdeme na rovnici obecnou
  2) Najdeme normálový vektor přímky a postupujeme podle následujícího příkladu:

Příklad:
Napište obecnou rovnici přímky určené bodem A = [-2,6] a bodem B = [4,-3].

Řešení:
Nejprve najdeme vektor v = AB = (6,-9). K němu kolmý vektor (normálový vektor přímky) n = (9 , 6).

Máme již první koeficienty obecné rovnice a = 9 , b = 6.

Rovnice přímky bude mít tento tvar: 9x + 6y + c = 0

Zbývá nalézt koeficient c. Ten najdeme tak, že dosadíme jeden z bodů A nebo B za x a y do rovnice:

$A \in p$: 9.(-2) + 6.6 + c = 0
- 18 + 36 + c = 0
c = -18

Celá rovnice bude mít tvar: 9x + 6y - 18 = 0 můžeme ji ještě dělit 3
p: 3x + 2y - 6 = 0

Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu A = [x_0 , y_0] od přímky p : ax + by + c = 0

Vypočteme podle vzorce $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Příklad:

Je dána přímka p : 2x - 3 y + 7 = 0 . Vypočtěte vzdálenost bodu K = [-1 , 2] od této přímky.

Řešení:

Vypočteme podle vzorce $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|2x - 3y + 7|}{\sqrt{4 + 9}} = \dfrac{|-2 - 6 + 7|}{\sqrt{13}} = 0{,}277$

Úhel dvou přímek :

Vypočteme buď jako úhel dvou směrových nebo dvou normálových vektorů takto:

$$\cos\alpha = \frac{|u \circ v|}{|u|.|v|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|u_1.v_1 + u_2.v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Příklad:

Určete úhel přímek: p: -2x + 3y + 7 = 0

q: 3x - 4y +5 = 0

Řešení:

$n_p = (-2 , 3)$; $n_q = (3 , -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|n_{p1}.n_{q1} + n_{p2}.n_{q2}|}{\sqrt{n_{p1}^2 + n_{q1}^2}.\sqrt{n_{p2}^2 + n_{q2}^2}} = \frac{|-6 - 12|}{\sqrt{4+9}\sqrt{9+16}} = \frac{18}{5\sqrt{13}}$$

$$\alpha = 3^\circ\, 10'$$

Vzájemná poloha 2 přímek v rovině

Vzájemnou polohu určíme pomocí směrových vektorů obou přímek. Jsou -li přímky zadány obecnou rovnicí, je lepší místo směrových vektorů použít normálové.

a) rovnoběžné - totožné - směrové vektory lineárně závislé, všechny body společné

- různé - směrové vektory lineárně závislé, žádný společný bod

b) různoběžné - směrové vektory lineárně nezávislé, jeden společný bod - průsečík

Průsečík obou přímek najdeme, řešíme-li soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Příklad:

Určete vzájemnou polohu přímek p: x = -1 + 3.t q: x = 2 - 3.k

y = 2 - t y = -3 + k

Řešení:

$u_p = (3 , - 1)$; $v_q = (- 3 , 1)$

Pro směrové vektory obou přímek platí : $u_p = - v_q$

Přímky mohou být buď totožné nebo rovnoběžné.

Na přímce zvolíme libovolný bod C : volíme např . t = 2 x = 5 ; y = 0 C = [5 , 0]

Ověříme, zda tento bod leží i na přímce q : x = 2 - 3.k 5 = 2 - 3.k k = -1

y = -3 + k 0 = -3 + k k = 3

Protože hodnota k je různá, bod C na q neleží a přímky jsou rovnoběžné různé.

Příklad:

Určete vzájemnou polohu přímek p: -2x + 3y + 7 = 0

q: 3x - 4y +5 = 0

Řešení:

$n_p = (-2 , 3)$; $n_q = (3 , -4)$ - tyto vektory jsou lineárně nezávislé - přímky jsou **různoběžné**

Určíme jejich průsečík P: -2x + 3y + 7 = 0 / .3

3x - 4y +5 = 0 / . 2

-6x + 9y + 21 = 0

6x - 8y +10 = 0 obě rovnice sečteme

y + 31 = 0 y = -31

$$x = \frac{3y + 7}{2} = \frac{-93 + 7}{2} = -43$$ **P = [- 43 , -31]**

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek určíme tak , že na jedné z nich zvolíme libovolný bod a podle vzorce vypočteme jeho vzdálenost od druhé přímky.

Příklad:

Je dána přímka p : -2x + 3y + 7 = 0

q : -4x + 6y + 7 = 0

Určete jejich vzdálenost.

Řešení:

$n_p = (-2 , 3)$; $n_q = (-4 , 6)$ - tyto vektory jsou lineárně závislé , ale koeficient c v druhé rovnici není dvojnásobkem c v první rovnici - přímky jsou **rovnoběžné**

Na p zvolíme libovolný bod : x = -1 (volíme libovolně) y vyjde z rovnice - y = -3

A = [-1 , - 3]

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|-4x_0 + 6y_0 + 7|}{\sqrt{16 + 36}} = \frac{|4 - 18 + 7|}{\sqrt{52}} = 0{,}9707$$

Cvičení:

5. Napište obecnou rovnici přímky určené bodem A =[1,2] a B = [2, 1].
   [x + y - 3 = 0]
6. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A =[-3,2] a je rovnoběžná s osou x.
   [y = 2]
7. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A =[-3,2] a je rovnoběžná s osou y.
   [x = -3]
8. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A =[-3,2] a je rovnoběžná s přímkou 2x - 5y + 7 = 0.
   [2x - 5y + 16 = 0]

9. Určete vzájemnou polohu dvou přímek p : $x = 3+3t$, $y = -8+4t$
q : $-3x + 2y -5 = 0$

Určete případný průsečík , úhel nebo vzdálenost.

[různob.; P = [$\frac{141}{17};\frac{-16}{17}$]; $\alpha = 3°10'$]

10. Vypočtěte odchylku přímek p: $x – 3y + 6 = 0$; q: $x + 2y – 8 = 0$

[45°]

11. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A = [4,3] a má od přímky $x – y + 7 = 0$ odchylku 45°.

[$x - 4 = 0$ nebo $y - 3 = 0$]

12. Najděte průsečík přímek p: $2x – y – 3 = 0$, q: $3x + y –2 = 0$.

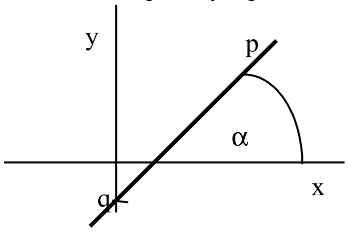
[P = [1, -1]]

Směrnicový tvar rovnice přímky

Je to rovnice v tomto tvaru:

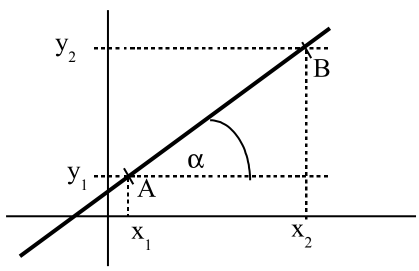
$$y = kx + q$$

Proměnnou k nazýváme směrnice přímky a platí: $k = \text{tg}\,\alpha$, kde α je úhel přímky p s osou x



Proměnná q se označuje úsek přímky na ose y. Přímka ve tvaru $y = kx + q$ tedy vždy prochází bodem [0,q].

Pro přímku určenou dvěma body A = [x_1,y_1]; B = [x_2,y_2] platí vzorec:



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Příklad:

Napište směrnicovou rovnici přímky p, která je určena body A = [6,1]; B = [9,10].

Řešení:

Z daného vztahu určíme k: $k = \frac{10-1}{9-6} = \frac{9}{3} = 3$

Rovnice má tvar $y = 3x + q$

Neznámou q zjistíme dosazením libovolného bodu do rovnice: $1 = 3.6 + q$

$q = -17$

Rovnice má tvar $y = 3x – 17$

Tento tvar rovnice přímky připomíná lineární funkci.

Cvičení:

1.) Určete směrnicový tvar rovnice přímky, dané bodem A = [4;2] a směrovým úhlem $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

$$[\ y = -\sqrt{3}x + \left(2 + 4\sqrt{3}\right)\ ]$$

2.) Určete směrnicový tvar rovnice přímky, dané bodem A = [-3;0] a bodem B = [$\frac{14}{3}$; -2]

$$[\ y = -\frac{6}{23}x - \frac{18}{23}\ ]$$

3.) Jsou dány body A = [-5;4] a B = [m ; -3]. Určete číslo m tak, aby přímka daná body A,B měla směrnici $k = -\frac{3}{4}$. Napište její rovnici v směrnicovém tvaru.

$$[\ m = \frac{13}{3}\ ;\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\ ]$$

4.) Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky, která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou danou body A = [-1;-4] a B = [4 ; 7]

$$[\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\ ]$$

5.) Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky, která prochází počátkem bodem A = [3;0] a její úsek na ose y je $q = -\frac{5}{2}$

$$[\ y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}\ ]$$

6.) Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky, která prochází počátkem bodem A = [4;6] a je kolmá k přímce o rovnici 7x – 2y + 6 = 0.

$$[\ y = -\frac{2}{7}x + \frac{50}{7}\ ]$$

7.) Určete směrnici a úsek q přímky dané rovnicí 9x – 4y + 12 = 0.

[k = 2,25; q = 3]

8.) Přímka p má rovnici $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$. Napište obecnou rovnici přímky.

[10x – 15y – 12 = 0]