

Analytická geometrie kružnice a elipsy

Kružnice - množina všech bodů v rovině, které mají od středu **S** stejnou vzdálenost **r**.

1.) $x^2 + y^2 = r^2$ - rovnice kružnice se středem v počátku

2.) $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ - rovnice kružnice s obecným středem $S = [m, n]$

Rovnice kružnice v středovém tvaru $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Po umocnění a úpravách dostaneme rovnici kružnice v obecném tvaru:

$$x^2 + y^2 - ax + by - c = 0$$

Příklad:

Napište rovnici kružnice se středem v počátku souřadného systému a poloměrem $r = 12$.

Řešení:

$$x^2 + y^2 = 144$$

Příklad:

Napište rovnici kružnice se středem $S = [2, -1]$ a poloměrem $r = 5$.

Řešení:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

Příklad:

Napište rovnici kružnice se středem $S = [-3, 4]$ a bodem na kružnici $A = [3, 1]$

Řešení:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$$

souřadnice bodu A dosadíme za x a y do rovnice a vypočteme r : $(3 + 3)^2 + (1 - 4)^2 = r^2$

$$36 + 9 = r^2 \quad r^2 = 45$$

k : $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 45$

Příklad:

Rovnici kružnice v obecném tvaru převed'te na tvar středový: $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 75 = 0$, určete S a r .

Řešení:

členy rovnice přerovnáme tak, aby u sebe byly členy obsahující x a y: $x^2 + 8x + y^2 - 10y = 75$

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 75 + 16 + 25$$

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 116$$

$$S = [-4, 5]; r = \sqrt{116}$$

Příklad:

Rovnici kružnice v obecném tvaru převed'te na tvar středový: $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$, určete S a r .

Řešení:

členy rovnice přerovnáme tak, aby u sebe byly členy obsahující x a y: $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

$$S = [-1, 3]; r = \sqrt{10}$$

Cvičení:

- 1.) Je dán střed kružnice $S = [3,2]$, $r = 11$. Napište středovou rovnici kružnice.

$$[(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 121]$$

- 2.) Je dán střed kružnice $S = [4,1]$, $r = 2$. Napište středovou rovnici kružnice.

$$[(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 4]$$

- 3.) Je dán střed kružnice $S = [-1;-1]$, $r = 1$. Napište středovou rovnici kružnice.

$$[(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1]$$

- 4.) Je dán střed kružnice $S = [0,0]$, $r = 7$. Napište středovou rovnici kružnice.

$$[x^2 + y^2 = 49]$$

- 5.) Určete střed a poloměr kružnice: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$$[S = [4,1], r = 3]$$

- 6.) Určete střed a poloměr kružnice: $x^2 + y^2 - 16 = 0$

$$[S = [0,0], r = 4]$$

- 7.) Určete střed a poloměr kružnice: $x^2 + (y - 3)^2 - 5 = 0$

$$[S = [0,3], r = \sqrt{5}]$$

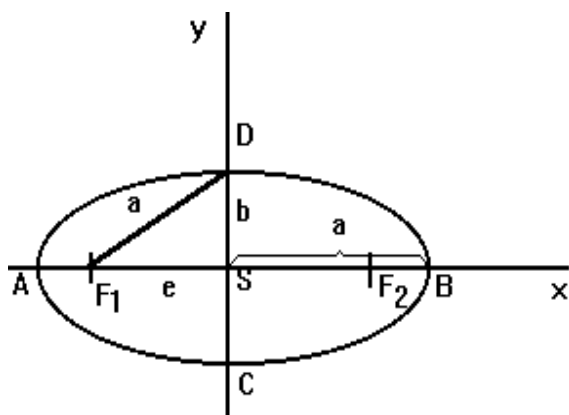
- 8.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ převed'te na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

$$[(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25; S = [3, -2]; r = 5]$$

- 9.) Rovnici kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ převed'te na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

$$[(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9; S = [1, -2]; r = 3]$$

Elipsa = množina všech bodů v rovině, které mají od 2 daných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností $2a$



F_1, F_2 - ohniska

e - vzdálenost ohniska od středu (excentricita = výstřednost)

b - velikost vedlejší poloosy

a - velikost hlavní poloosy

A,B - hlavní vrcholy

C,D - vedlejší vrcholy

Platí: $a^2 = e^2 + b^2$

- 1.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - rovnice elipsy se středem v počátku

- 2.) $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ - rovnice elipsy s obecným středem $S = [m, n]$

V obecném tvaru: $kx^2 + ly^2 + ax + by + c = 0$ kde $l > 0$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem v počátku a velikostmi poloos $a = 5$, $b = 4$.

Řešení:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem $S = [2, 6]$ a velikostmi poloos $a = 5$, $b = 4$.

Řešení:

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 6)^2}{16} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem $S = [-2, 5]$ a velikostí poloosy $a = 10$, a excentricitou $e = 8$.

Řešení:

Nejprve vypočteme b ze vztahu $a^2 = e^2 + b^2$

$$b^2 = 100 - 64 = 36 \quad b = 6$$

$$\frac{(x + 2)^2}{100} + \frac{(y - 5)^2}{36} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy, jsou-li dána ohniska $F_1 = [-2, 5]$, $F_2 = [6, 5]$, a velikostí poloosy $a = 5$.

Řešení:

Střed S leží ve středu úsečky $F_1 F_2$: $S = [2, 5]$

$$e = |F_1 S| = 4 \quad b^2 = 25 - 16 = 9 \quad b = 3$$

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy, jsou-li dány hlavní vrcholy $A = [-2, 3]$, $B = [8, 3]$, a velikostí excentricity $e = 3$.

Řešení:

Střed S leží ve středu úsečky AB : $S = [3, 3]$

$$a = |AS| = 5 \quad b^2 = 25 - 9 = 16 \quad b = 4$$

Cvičení

10.) Napište rovnici elipsy, která má střed $S = [3, 2]$; ohnisko $F_1 = [-1, 2]$ a velikost $b = 3$.

$$\left[\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \right]$$

11.) Napište rovnici elipsy, která má střed $S = [0, 0]$; ohnisko $F_1 = [-5, 0]$ a velikost $a = 7$.

$$\left[\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1 \right]$$

12.) Napište rovnici elipsy, která má střed $S = [0, 0]$; ohnisko $F_2 = [2, 0]$ a velikost $a = 7$.

$$\left[\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1 \right]$$

13.) Je dána rovnice elipsy $x^2 + 3y^2 + 8x - 18y + 31 = 0$. Převed'te ji na středový tvar, určete souřadnice středu.

$$\left[\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1; S = [-4,3] \right]$$

14.) Napište středovou rovnici elipsy se středem $S = [-6,2]$ a jejím bodem $K = [2,5]$, je-li $a = 10$, a hlavní osa je rovnoběžná s osou x .

$$\left[\frac{(x+6)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1 \right]$$

15.) Napište středovou rovnici elipsy se středem $S = [-3,-1]$ a jejím bodem $K = [-8,-3]$, je-li $b = 3$, a hlavní osa je rovnoběžná s osou x .

$$\left[\frac{(x+3)^2}{45} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \right]$$