

Analytická geometrie kružnice a elipsy

**Kružnice** - množina všech bodů v rovině, které mají od středu **S** stejnou vzdálenost **r**.

1.)  $x^2 + y^2 = r^2$  - rovnice kružnice se středem v počátku

2.)  $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$  - rovnice kružnice s obecným středem  $S = [ m, n ]$

Rovnice kružnice v středovém tvaru  $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Po umocnění a úpravách dostaneme rovnici kružnice v obecném tvaru:

$$x^2 + y^2 - ax + by - c = 0$$

Příklad:

Napište rovnici kružnice se středem v počátku souřadného systému a poloměrem  $r = 12$ .

Řešení:

$$x^2 + y^2 = 144$$

Příklad:

Napište rovnici kružnice se středem  $S = [ 2, - 1 ]$  a poloměrem  $r = 5$ .

Řešení:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

Příklad:

Napište rovnici kružnice se středem  $S = [ -3, 4 ]$  a bodem na kružnici  $A = [ 3, 1 ]$

Řešení:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$$

souřadnice bodu A dosadíme za x a y do rovnice a vypočteme r :  $(3 + 3)^2 + (1 - 4)^2 = r^2$

$$36 + 9 = r^2 \quad r^2 = 45$$

**k :**  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 45$

Příklad:

Rovnici kružnice v obecném tvaru převed'te na tvar středový:  $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 75 = 0$ , určete S a r .

Řešení:

členy rovnice přerovnáme tak, aby u sebe byly členy obsahující x a y:  $x^2 + 8x + y^2 - 10y = 75$

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 75 + 16 + 25$$

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 116$$

$$S = [ -4, 5 ]; r = \sqrt{116}$$

Příklad:

Rovnici kružnice v obecném tvaru převed'te na tvar středový:  $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$ , určete S a r .

Řešení:

členy rovnice přerovnáme tak, aby u sebe byly členy obsahující x a y:  $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

$$S = [-1, 3]; r = \sqrt{10}$$

Cvičení:

1.) Je dán střed kružnice  $S = [3,2]$ ,  $r = 11$ . Napište středovou rovnici kružnice.

$$[(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 121]$$

2.) Je dán střed kružnice  $S = [4,1]$ ,  $r = 2$ . Napište středovou rovnici kružnice.

$$[(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 4]$$

3.) Je dán střed kružnice  $S = [-1;-1]$ ,  $r = 1$ . Napište středovou rovnici kružnice.

$$[(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1]$$

4.) Je dán střed kružnice  $S = [0,0]$ ,  $r = 7$ . Napište středovou rovnici kružnice.

$$[x^2 + y^2 = 49]$$

5.) Určete střed a poloměr kružnice:  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$$[S = [4,1], r = 3]$$

6.) Určete střed a poloměr kružnice:  $x^2 + y^2 - 16 = 0$

$$[S = [0,0], r = 4]$$

7.) Určete střed a poloměr kružnice:  $x^2 + (y - 3)^2 - 5 = 0$

$$[S = [0,3], r = \sqrt{5}]$$

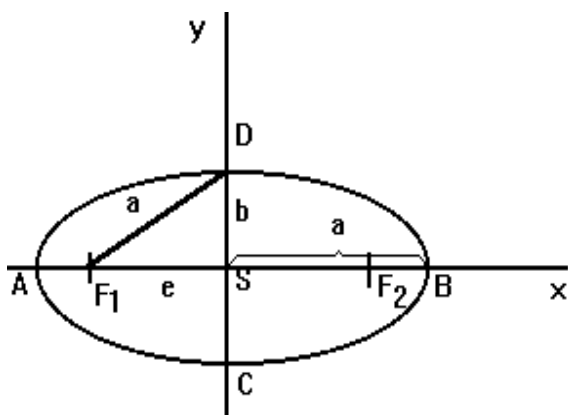
8.) Rovnici kružnice  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  převed'te na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

$$[(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25; S = [3, -2]; r = 5]$$

9.) Rovnici kružnice  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  převed'te na středový tvar, určete souřadnice středu a poloměr.

$$[(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9; S = [1, -2]; r = 3]$$

**Elipsa** = množina všech bodů v rovině, které mají od 2 daných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností  $2a$



$F_1, F_2$  - ohniska

$e$  - vzdálenost ohniska od středu (excentricita = výstřednost)

$b$  - velikost vedlejší poloosy

$a$  - velikost hlavní poloosy

A,B - hlavní vrcholy

C,D - vedlejší vrcholy

**Platí:**  $a^2 = e^2 + b^2$

1.)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  - rovnice elipsy se středem v počátku

2.)  $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$  - rovnice elipsy s obecným středem  $S = [m, n]$

V obecném tvaru:  $kx^2 + ly^2 + ax + by + c = 0$  kde  $l > 0$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem v počátku a velikostmi poloos  $a = 5$ ,  $b = 4$ .

Řešení:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem  $S = [2, 6]$  a velikostmi poloos  $a = 5$ ,  $b = 4$ .

Řešení:

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 6)^2}{16} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy se středem  $S = [-2, 5]$  a velikostí poloosy  $a = 10$ , a excentricitou  $e = 8$ .

Řešení:

Nejprve vypočteme  $b$  ze vztahu  $a^2 = e^2 + b^2$

$$b^2 = 100 - 64 = 36 \quad b = 6$$

$$\frac{(x + 2)^2}{100} + \frac{(y - 5)^2}{36} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy, jsou-li dána ohniska  $F_1 = [-2, 5]$ ,  $F_2 = [6, 5]$ , a velikostí poloosy  $a = 5$ .

Řešení:

Střed  $S$  leží ve středu úsečky  $F_1 F_2$ :  $S = [2, 5]$

$$e = |F_1 S| = 4 \quad b^2 = 25 - 16 = 9 \quad b = 3$$

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$

Příklad:

Napište rovnici elipsy, jsou-li dány hlavní vrcholy  $A = [-2, 3]$ ,  $B = [8, 3]$ , a velikostí excentricity  $e = 3$ .

Řešení:

Střed  $S$  leží ve středu úsečky  $AB$ :  $S = [3, 3]$

$$a = |AS| = 5 \quad b^2 = 25 - 9 = 16 \quad b = 4$$

Cvičení

10.) Napište rovnici elipsy, která má střed  $S = [3, 2]$ ; ohnisko  $F_1 = [-1, 2]$  a velikost  $b = 3$ .

$$\left[ \frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \right]$$

11.) Napište rovnici elipsy, která má střed  $S = [0, 0]$ ; ohnisko  $F_1 = [-5, 0]$  a velikost  $a = 7$ .

$$\left[ \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1 \right]$$

12.) Napište rovnici elipsy, která má střed  $S = [0, 0]$ ; ohnisko  $F_2 = [2, 0]$  a velikost  $a = 7$ .

$$\left[ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1 \right]$$

13.) Je dána rovnice elipsy  $x^2 + 3y^2 + 8x - 18y + 31 = 0$ . Převed'te ji na středový tvar, určete souřadnice středu.

$$\left[ \frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1; S = [-4,3] \right]$$

14.) Napište středovou rovnici elipsy se středem  $S = [-6,2]$  a jejím bodem  $K = [2,5]$ , je-li  $a = 10$ , a hlavní osa je rovnoběžná s osou  $x$ .

$$\left[ \frac{(x+6)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1 \right]$$

15.) Napište středovou rovnici elipsy se středem  $S = [-3,-1]$  a jejím bodem  $K = [-8,-3]$ , je-li  $b = 3$ , a hlavní osa je rovnoběžná s osou  $x$ .

$$\left[ \frac{(x+3)^2}{45} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \right]$$