

Kvadratické křivky a jejich vzájemná poloha s přímkou, asymptoty hyperboly

Nastanou tyto 4 možnosti:

- 1.) 2 společné body - sečna
- 2.) 1 společný bod - tečna
- 3.) žádný společný bod - vnější přímka
- 4.) zvláštní případy:
 - a) přímka rovnoběžná s asymptotou hyperboly, která neprochází středem hyperboly (sečna s jedním společným bodem)
 - b) přímka je rovnoběžná s osou paraboly - je sečnou, ale protíná parabolu v jednom bodě

Asymptoty hyperboly:

Jsou to 2 přímky, které nemají s hyperbolou žádný společný bod:

$$(y - n) = \frac{b}{a} (x - m)$$

$$(y - n) = -\frac{b}{a} (x - m)$$

Příklad:

Zjistěte vzájemnou polohu přímky p: $4x + 5y - 25 = 0$ a elipsy: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Řešení:

Jedná se o elipsu se středem v počátku - $S = [0,0]$, $a = 5$, $b = 3$, $e = 4$

$$F_1 = [-4,0] \quad F_2 = [4,0]$$

Řešení pomocí soustavy rovnic: $4x + 5y - 25 = 0 \Leftrightarrow y = 5 - \frac{4}{5}x$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad / \cdot 225$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$9x^2 + 25(5 - 4/5x)^2 = 225$$

$$9x^2 + 25(25 - 8x + 16/25x^2) = 225$$

$$25x^2 - 200x + 400 = 0$$

$$x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$D = 16 - 64 = -48$$

Rovnice má záporný diskriminant, nemá žádné reálné kořeny \Leftrightarrow soustava nemá reálné řešení

=> elipsa a přímka nemají žádný společný bod, přímka je vnější přímkou elipsy.

Cvičení:

1. Určete vzájemnou polohu přímky $x + 2y - 14 = 0$ a elipsy $x^2 + 4y^2 = 100$. Případně určete průsečíky.
2. Zjistěte vzájemnou polohu přímky $3x - y + 2 = 0$ a elipsy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Případně určete průsečíky.
3. Přímka $3x + 4y + c = 0$ je tečnou kružnice $x^2 + y^2 = 25$. Určete c .

Příklad:

Určete vzájemnou polohu přímky $p: 2x + 2y - 5 = 0$

a paraboly $p_a: y^2 = 10x$

Řešení: _____

$p_a: V = [0,0]$

$p = 5$

$F = [2,5;0]$

Řešení soustavy: $2x + 2y - 5 = 0$ $x = \frac{5 - 2y}{2}$

$y^2 = 10x$

$y^2 = 25 - 10y$

$y^2 + 10y - 25 = 0$

$D = 100 + 100 = 200$

$D = 10\sqrt{2}$

Soustava rovnic by měla dvě řešení - přímka je sečna.

$y_{1,2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{2}$ $x = \frac{5 - 2y}{2}$ $x_1 = \frac{5 + 10 + 5\sqrt{2}}{2} = \frac{15 + 5\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \frac{5 + 10 - 5\sqrt{2}}{2} = \frac{15 - 5\sqrt{2}}{2}$

$P_1 = \left[\frac{15 - 5\sqrt{2}}{2}; 5 + 5\sqrt{2} \right]$

$P_2 = \left[\frac{15 + 5\sqrt{2}}{2}; 5 - 5\sqrt{2} \right]$

Cvičení:

1. Přímka $3x - 4x + 6 = 0$ je tečnou paraboly $y^2 = 2px$. Určete p .
2. Přímka $y = kx + 2$ je tečnou paraboly $y^2 = 4x$. Určete k .
3. Určete vzájemnou polohu přímky a paraboly $4x^2 - 9y = 72$
 $2x - y - 8 = 0$