

Analytická geometrie hyperboly a paraboly

Hyperbola = množina všech bodů v rovině, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od 2 daných různých bodů (ohnisek) je rovna konstantě $2a$.

Jeli $a = b$ - rovnoosá hyperbola

S = střed hyperboly

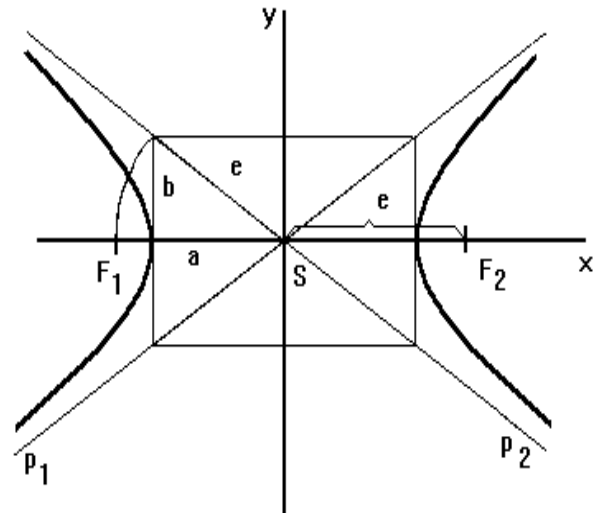
A, B - vrcholy hyperboly

$F_1S = F_2S = e$ - výstřednost hyperboly

a - velikost hlavní poloosy

Platí: $e^2 = a^2 + b^2$

b - velikost vedlejší poloosy



1.) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - rovnice hyperboly se

středem v počátku

2.) $\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ - rovnice hyperboly s obecným středem $S = [m, n]$

V obecném tvaru: $kx^2 - ly^2 + ax + by + c = 0$

kde $l > 0$

Asymptoty hyperboly:

Jsou to 2 přímky, které nemají s hyperbolou žádný společný bod:

$$(y - n) = \frac{b}{a} (x - m)$$

$$(y - n) = -\frac{b}{a} (x - m)$$

Cvičení

1.) Napište středovou rovnici hyperboly, je-li $S = [0; 0]$; $b = 3$; $F_1 = [-4, 0]$

$$\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1 \right]$$

2.) Napište středovou rovnici hyperboly, je-li $S = [0; 0]$; $a = 3$; $F_2 = [6, 0]$

$$\left[\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1 \right]$$

3.) Napište středovou rovnici hyperboly, je-li $S = [0; 0]$; $b = 5$; $F_2 = [0, 7]$

$$\left[-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1 \right]$$

- 4.) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s x ; $S=[2;-5]$; $b = 3\sqrt{2}$ a bod $M=[-1,-2]$ je bodem hyperboly.

$$\left[-\frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(y+5)^2}{6} = 1 \right]$$

- 5.) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s x ; $S=[7;1]$ je-li $b = 3$; $e = 5$

$$\left[\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \right]$$

- 6.) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s x ; $S=[-2;3]$ $a=6, e=10$.

$$\left[\frac{(x+2)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{64} = 1 \right]$$

- 7.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $4x^2 - y^2 + 32x - 4y + 24 = 0$

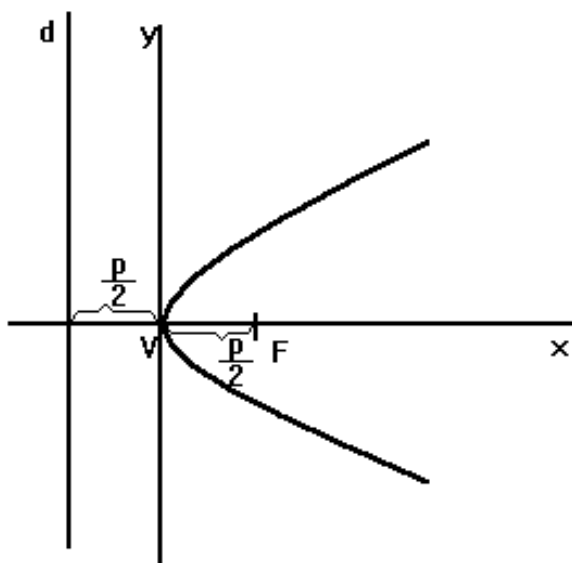
$$[S = [-4, -2] ; a=3; b=6; e = 3\sqrt{5}]$$

- 8.) Určete souřadnice středu hyperboly, její výstřednost a velikost jejích poloos: $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 12 = 0$

$$[S = [-1, 3] ; a = 2; b = 2; e = 2\sqrt{2}]$$

Analytická geometrie paraboly

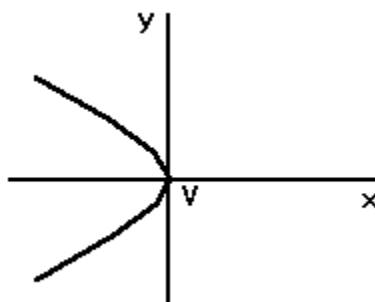
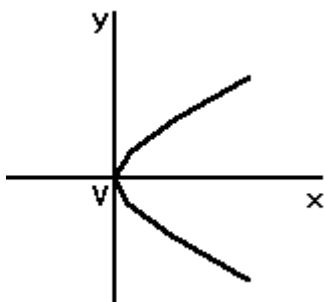
Parabola = množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F a od dané řídicí přímky d .



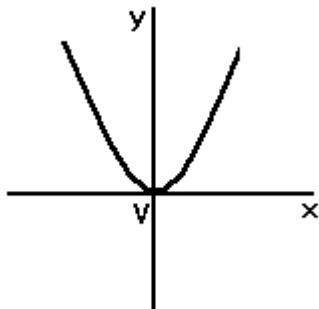
Existují 4 typy rovnice paraboly:

a) $y^2 = 2p x$

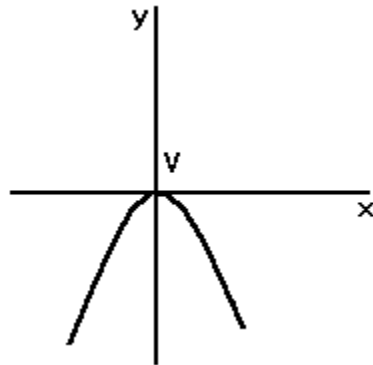
b) $y^2 = -2p x$



$$c) x^2 = 2p y$$



$$b) x^2 = -2p y$$



Vrchol paraboly leží v počátku souřadného systému.

Je-li vrchol paraboly umístěn v bodě $V = [m , n]$, má parabola tyto rovnice:

$$a) (y - n)^2 = 2p (x - m)$$

$$b) (y - n)^2 = -2p (x - m)$$

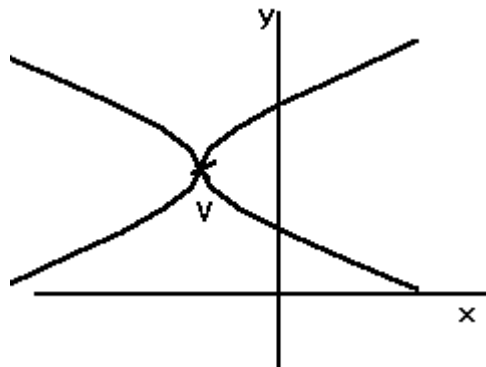
$$c) (x - m)^2 = 2p (y - n)$$

$$d) (x - m)^2 = -2p (y - n)$$

Příklad:

Napište rovnici paraboly, je-li dáno $V = [-2 , 3]$, $p = 2$ a osa paraboly je rovnoběžná s x .

Řešení:



Mohou nastat tyto dva případy

$$1) (y - 3)^2 = 4 (x + 2)$$

$$2) (y - 3)^2 = -4 (x + 2)$$

V obou případech vychází různě i ohnisko a rovnice řídicí přímky:

$$1) F = [-1 , 3] \quad d: x = -3$$

$$2) F = [-3 , 3] \quad d: x = -1$$

Cvičení:

9.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly: $x^2 = 8y$
 $[V = [0 , 0] ; F = [0 , 2] ; p = 4 ; d: y = -2]$

10.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly: $y^2 = -4x$
 $[V = [0 , 0] ; F = [-1 , 0] ; p = 2 ; d: x = 1]$

11.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídicí přímky paraboly: $y^2 = 6x$
 $[V = [0 , 0] ; F = [1,5 ; 0] ; p = 3 ; d: x = -1,5]$

- 12.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $(y - 2)^2 = 10(x + 1)$
 [$V = [-1, 2]$; $F = [1,5; 2]$; $p = 5$; $d: x = -3,5$]
- 13.) Určete souřadnice vrcholu, ohniska, parametr a rovnici řídící přímky paraboly: $(x - 3)^2 = -(y + 4)$
 [$V = [3, -4]$; $F = [3; -4,25]$; $p = 0,5$; $d: y = -3,75$]
- 14.) Napište rovnici paraboly s vrcholem $V = [3, 2]$ a bodem na parabole $Q = [4, 4]$, je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y .

$$[(x - 3)^2 = 0,5(y - 2)]$$

Určení křivky

- 15.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$
 [elipsa, $S = [1, 2]$; $a = 5$, $b = 3$, $e = 4$, $F_1 = [-3; 2]$, $F_2 = [5; 2]$]
- 16.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
 [kružnice, $S = [2, -3]$; $r = 4$]
- 17.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $y^2 - 8x + 6y - 23 = 0$
 [parabola, $V = [-4, -3]$; $p = 4$, $F = [-2; -3]$; $d: x = -6$]
- 18.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$
 [hyperbola, $S = [-3, 2]$; $a = b = 3$, $e = 3\sqrt{2}$, $F_1 = [-3 - 3\sqrt{2}; 2]$, $F_2 = [-3 + 3\sqrt{2}; 2]$]
- 19.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $3x^2 + 8y^2 - 12x - 16y + 44 = 0$
 [není kuželosečka]
- 20.) Určete druh kuželosečky a její základní prvky: $3x^2 + 2y^2 + 18x + 4y + 11 = 0$
 [elipsa, $S = [-3, -1]$; $a = 3$; $b = \sqrt{6}$, $e = \sqrt{3}$, $F_1 = [-3; -1 - \sqrt{3}]$, $F_2 = [-3; -1 + \sqrt{3}]$ a lly]