20_s

Analytická geometrie roviny - vzájemná poloha dvou rovin, odchylka dvou rovin, vzdálenost dvou rovin

Parametrické i obecné vyjádření roviny

Rovina je jednoznačně určena: - 3 body (různými, které neleží v přímce)

- 2 netotožnými přímkami
- přímkou a bodem mimo ni

V analytické geometrii se nejčastěji používá zadání roviny pomocí 1 bodu a 2 lineárně nezávislých vektorů.

a) Parametricky

- pomocí bodu A = $[a_1,a_2,a_3]$ a vektoru $u = (u_1,u_2,u_3)$ a $v = (v_1,v_2,v_3)$

ρ : $x = a_1 + t.u_1 + k.v_1$

$y = a_2 + t.u_2 + k.v_2$

$z = a_3 + t.u_3 + k.v_3$

b) Obecně

ρ: $ax + by + cz + d = 0$

$n = (a,b,c)$ - normálový vektor roviny (vektor kolmý k rovině)

Zvláštní případy obecné rovnice roviny:

1) $d = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0$

rovina prochází počátkem P = [0,0,0]

2) $a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$

rovina je rovnoběžná s osou x

3) a = 0 d = 0 => by + cz = 0

rovina je rovnoběžná s osou x a rovina prochází počátkem P = [0,0,0]

4) b = 0 => ax + cz + d = 0

rovina je rovnoběžná s osou y

5) b = 0 d = 0 => ax + cz = 0

rovina je rovnoběžná s osou y a rovina prochází počátkem P = [0,0,0]

6) c = 0 => ax + by + d = 0

rovina je rovnoběžná s osou z

7) c = 0 d = 0 => ax + by = 0

rovina je rovnoběžná s osou z a rovina prochází počátkem P = [0,0,0]

atd.

Cvičení:

1. Rovina je určena body A = [1,3,-4] ,B = [-1,3,7] ,C = [2,-3,5] .Napište její parametrickou i obecnou rovnici.
2. Rovina je určena bodem A = [2,2,2] a dvojicí vektorů u = (-1,2,3) a v =(5,3,1). Napište její parametrickou rovnici a určete zda v této rovině leží i bod B = [3,3,3].

Přímka v prostoru:

Přímka v prostoru je vyjářena pouze parametricky, obecnou rovnici nelze napsat.

$x = a_1 + t.u_1$ $\qquad$ $A = [a_1,a_2,a_3]$ - je bod přímky

$y = a_2 + t.u_2$ $\qquad$ $u = (u_1,u_2,u_3)$ - směrový vektor

$z = a_3 + t.u_3$

Vzájemná poloha přímky a roviny:

Mohou nastat tyto tři případy vzájemné polohy p a ρ

- *p* je různoběžná s ρ (směrový vektor přímky *u* a normálový vektor roviny *n* nejsou kolmé - tedy $u \circ n \neq 0$)
- *p* je rovnoběžná s ρ (směrový vektor přímky *u* a normálový vektor roviny *n* jsou kolmé - tedy $u \circ n = 0$)
- *p* leží v rovině ρ (směrový vektor přímky *u* a normálový vektor roviny *n* jsou kolmé a navíc každý bod přímky je i bodem roviny)

Příklad:

Určete vzájemnou polohu přímky *p* a roviny ρ:

p: $x = 2+3t$

$y = 5+4t$

$z = t$ $\qquad$ $u = (3,4,1)$ $\qquad$ $A = [2,5,0]$

ρ : $3x - 2y - z + 15 = 0$ $\qquad$ $n = (3,-2,1)$

$u \circ n = 9 - 8 - 1 = 0$

mohou být rovnoběžné, nebo *p* leží v ρ .

leží A v rovině ρ ? : 3.2 - 2.5 + 15 = 0 ?

6 -10 +15 = 11

Bod A neleží v rovině ρ , tedy ani přímka *p* neleží v ρ . $\qquad$ ***p* je rovnoběžná s ρ**

Vzdálenost bodu od roviny

Bod A=[x_0,y_0,z_0] má od roviny ρ: ax + by + cz + d = 0 vzdálenost $v = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Vzdálenost přímky a roviny

Vzdálenost *p* od ρ (musí být p II ρ) vypočteme tak,že zvolíme na p libovolný bod a určíme jeho vzdálenost od ρ .

Příklad:

Určete vzdálenost p: x = 2 + 3t

y = 5 + 4t

z = t

od roviny ρ: 3x - 2y - z + 15 = 0

Řešení:

p: A = [2,5,0]

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3.2 - 2.5 + 15|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{|11|}{\sqrt{14}} = 2{,}939$$

Odchylka přímky a roviny

přímka *p* je určena bodem A a směrovým vektorem $u=(u_1,u_2,u_3)$

rovina ρ má normálový vektor $n = (n_1,n_2,n_3)$

jejich odchylka se zpočítá podle vzorce:

$$\sin\alpha = \frac{|\, u \circ n \,|}{|u|.|n|}$$

<u>Příklad:</u>

Je dána přímka p: $x = 1+ t,\ y = 2 + t,\ z = 1$

a rovina ρ: $2x + 4y + 4z - 5 = 0$

Určete jejich odchylku.

<u>Řešení:</u>

$u = (1,1,0)$ $n = (2,4,4)$

$$\sin\alpha = \frac{|\, u \circ n \,|}{|u|.|n|} = \frac{|2.1+ 4.1+ 4.0|}{\sqrt{1+1}.\sqrt{4+16+16}} = \frac{|\,6\,|}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>$\alpha = 45°$</u>

Průsečík přímky a roviny

- Zjistí se jako výsledek řešení soustavy rovnic

<u>Příklad:</u>

Najděte průsečík *p* a ρ : p: $x= 1+t,\ y= 2+t,\ z= 1$

ρ: $2x + 4y + 4z - 5 = 0$

$2.(1+t) + 4.(2+t) + 4.1 - 5 = 0$

$2 + 2t + 8 + 4t + 4 - 5 = 0$

$6t + 9 = 0$

$t = -1,5$

Dosadíme do rovnice přímky $x = 1 -1,5 = -0,5$ $y = 2 -1,5 = 0,5$ $z = 1$

<u>**P = [-0,5 ; 0,5 ; 1]**</u>

<u>Cvičení:</u>

1. Určete vzájemnou polohu p a ρ, případně odchylku, průsečík, vzdálenost p od ρ :
   ρ: $x + y + 2z + 6 = 0$
   p: $x= 2+t$; $y= 1-4t$; $z= 1/2 +t$
2. Určete vzájemnou polohu p a ρ, případně odchylku, průsečík, vzdálenost p od ρ :
   ρ: $x+5y+z-3=0$
   p: $x= 2t-1$; $y= 1-t$; $z= 2+3t$

Vzájemná poloha dvou rovin:

Dvě roviny mohou být:

- rovnoběžné různé - jejich normálové vektory jsou lineárně závislé (jeden je k - násobkem druhého), nemají žádný společný bod   např   ρ : 2x + 3y - 5z - 4 = 0
  α: -4x - 6y + 10z + 5 = 0
- rovnoběžné, totožné - jejich normálové vektory jsou lineárně závislé, všechny body mají společné
  např .   ρ : 2x + 3y - 5z - 4 = 0
  α: -4x - 6y + 10z + 8 = 0
- různoběžné - jejich normálové vektory jsou lineárně nezávislé
  např .   ρ : 2x + 3y - 5z - 4 = 0
  α: -4x - 8y + 7z + 8 = 0

  mají společnou průsečnici

Odchylka dvou rovin:

Vypočte se podle vzorce $\cos\alpha = \dfrac{|n_1 \circ n_2|}{|n_1|.|n_2|}$ kde n_1 a n_2 jsou normálové vektory rovin.

Příklad:

Vypočtěte odchylku rovin: ρ : 2x + 3y - 5z - 4 = 0
α: -4x - 8y + 7z + 8 = 0

Řešení:

$n_1 = (2 , 3 , -5)$ $n_2 = (-4 , -8 , 7)$

$$\cos\alpha = \frac{|n_1 \circ n_2|}{|n_1|.|n_2|} = \frac{|-8-24-35|}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{16+64+49}} = \frac{|-67|}{\sqrt{38.119}} = 0{,}99634$$

$\alpha = 4°54'$

Vzdálenost dvou rovin:

Roviny musí být rovnoběžné a různé. Určí se tak, že se na jedné rovině zvolí libovolný bod a podle vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu od roviny se vypočte vzdálenost rovin.

Příklad:

Vypočtěte vzdálenost rovin: ρ : 2x + 3y - 5z - 4 = 0
α: -4x - 6y + 10z + 20 = 0

Řešení:

V rovině ρ zvolíme bod A = [0 , -2 , -2]

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-6.(-2)+10.(-2)+20|}{\sqrt{16+36+100}} = \frac{|12-20+20|}{\sqrt{152}} = 0{,}973$$

Cvičení:

1. Určete vzájemnou polohu dvou rovin, případně vzdálenost nebo odchylku :   ρ : -3x + 5y + 6z - 7 = 0
   α : 3x - 5y - 6z - 17 = 0
2. Určete vzájemnou polohu dvou rovin, případně vzdálenost nebo odchylku :   ρ : -3x + 10y + z - 7 = 0
   α : 5x - 2y - 8z - 1 = 0