21

Kombinatorika

Kombinatorika = část matematiky, která se zabývá různými číselnými "kombinacemi".

Využití - např při hledání počtu možných tipů ve sportce nebo jiných soutěžních hrách , v chemii při spojování molekul ....

Základním pojmem kombinatoriky je pojem **SKUPINA** o n - prvcích.

Z těchto n- prvků můžeme vytvářet :
- variace
- permutace
- kombinace

!!! V uvedených vzorcích se vyskytují čísla n a k tato čísla musí být z oboru čísel přirozených.

Variace k-té třídy z n-prvků

Je to každá uspořádaná **k**-tice sestavená pouze z těchto **n** prvků tak, že každý je v ní obsažen nejvýše jednou.

$V_k(n) = n.(n-1).(n-2).....(n-k+1)$ Jiný vzorec: $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Příklad:

Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou každé dvě číslice různé a jsou sestavena pouze z číslic 1,2,3,4,5.

Řešení:

Jedná se o variace z pěti prvků třetí třídy.

$V_3(5) = 5.4.3 = 60$

Těchto čísel je možno sestavit 60.

Příklad:

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu jsou každé dvě číslice různé .

Řešení:

Jedná se o variace z deseti prvků čtvrté třídy. Musíme však vyřadit všechna čísla začínající nulou 0…. Těch je $V_3(10)$.

$V_4(10) - V_3(10) = 10 . 9 . 8 . 7 - 10 . 9 . 8 = 10 . 9 . 8 . (7 – 1) = 10 . 9 . 8 . 6 = 4320$

Variace k-té třídy z n-prvků s opakováním

Je to každá uspořádaná **k**-tice sestavená pouze z těchto **n** prvků. Prvky se mohou i opakovat.

$V'_k(n) = n^k$

Příklad:

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel. (v jejich dekadickém zápisu se číslice mohou opakovat)

Řešení:

$V'_4(10) – V'_3(10) = 10^4 – 10^3 = 10000 – 1000 = 9000$

Příklad:

Kolik šestimístných telefonních čísel je možno sestavit, má-li mít telefonní číslo na počátku číslici 7?

Řešení:

Čísla budou mít tento tvar: $7\underbrace{** ***}$

na těchto 5 místech budeme střídat libovolné číslice (0 – 9), tyto číslice se mohou opakovat

Telefonních čísel tedy bude $V'_5(10) = 10^5 = 100000$.

Příklad:

V Tramtárii mají S PZ u auta tvořenu uspořádanou sedmicí, , jejíž první tři členy jsou písmena a další 4 číslice. K dispozici mají 28 písmen a 10 číslic. Kolik SPZ mají k dispozici?

Řešení:

Písmena tvoří uspořádané trojice, mohou se opakovat: $V'_3(28) = 28^3$

Čísla tvoří uspořádané čtveřice, mohou se též opakovat: $V'_4(10) = 10^4$

Celkem: $28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000$

Permutace z n-prvků

je to každá variace n-té třídy z těchto n-prvků

$P(n) = n!$ $\qquad$ $n! = n.(n-1).(n-2)......2.1$

Příklad:

Na poličku chceme postavit do řady vedle sebe 15 knih. Kolika způsoby je můžeme seřadit?

Řešení:

$P(15) = 15!$ $\qquad$ $15! = 1307674368000$

Kombinace k-té třídy z n-prvků

je to každá k-prvková podmnožina množiny určené těmito prvky

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ - kombinační číslo (čteme *n* nad *k*)

Příklad:

Volejbalového utkání se zúčastní 8 družstev. Určete, kolik utkání bude sehráno, jestliže hraje každý s každým.

Řešení:

Z 8 družstev vytváříme dvojice, které spolu hrají:

$$C_2(8) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!} = 4\cdot 7 = 28$$

Příklad:

Ve třídě je 30 žáků, z nichž je třeba vybrat trojici na literární soutěž. Kolika způsoby je možno tuto trojici vybrat?

Řešení:

Jedná se o kombinaci z 30 prvků 3. třídy, tedy

$$C_3(30)=\binom{30}{3}=\frac{30!}{3!(30-3)!}=\frac{30!}{3.2\cdot 27!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27!}{6\cdot 27!}=5\cdot 29\cdot 28=4060$$

Pro kombinační čísla platí:

$$\binom{n}{0}=1$$

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{n}{1}=n$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Úpravy výrazů s faktoriály a kombinačními čísly

Příklad:

Upravte výraz $\frac{n!}{(n-1)!}-\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$

Řešení:

V daných zlomcích rozložíme vždy větší člen - čitatel nebo jmenovatel a krátíme:

$$\frac{n.(n-1)!}{(n-1)!}-\frac{(n-1).(n-2)!}{(n-2)!}=n-(n-1)=n-n+1=1$$

Cvičení:

1. Upravte výraz: $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ [$\frac{n}{(n+1)!}$]

2. Upravte výraz: $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$ [$\frac{n+2}{(n+1)!}$]

3. Upravte výraz: $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}$ [0]

4. Upravte výraz: $\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}$ [$\frac{1}{(n+2)!}$]

5. Upravte výraz: $\frac{(n+2)!}{n!}-2\frac{(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}$ [2]

6. Upravte výraz: $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}-\frac{(n+1)!}{n!}$ [1]

Rovnice s kombinačními čísly

Příklad:

Řešte rovnici: $\binom{x-2}{x-4} + \binom{x-3}{x-5} = 16$

Řešení:

Levou stranu rovnice musíme nejprve upravit tak, abychom odstranili kombinační čísla:

$$\frac{(x-2)!}{(x-4)!.(x-2-x+4)!} + \frac{(x-3)!}{(x-5)!.(x-3-x+5)!} = 16$$

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{(x-4)!.2} + \frac{(x-3)(x-4)(x-5)!}{(x-5)!.2} = 16 \quad /.2$$

$$(x-2)(x-3) + (x-3)(x-4) = 32$$

$$x^2 - 5x + 6 + x^2 - 7x + 12 - 32 = 0$$

$$2x^2 - 12x - 14 = 0 /:2$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x-7).(x+1) = 0$$

Tato rovnice by měla dva kořeny $x_1 = 7$; $x_2 = -1$.

Protože se jedná o rovnici s kombinačními čísly, musíme řešení doplnit o podmínky .

Musí platit: **Aby mělo kombinační číslo $\binom{n}{k}$ smysl , musí být: n $\geq$ k ; n > 0 ; k > 0 a <u>n</u> i <u>k</u> musí být přirozená čísla.**

Podmínky: x - 2 > 0 ..... x > 2

x -4 > 0 .... x > 4

x - 3 > 0 ...... x > 3

x - 5 > 0 ...... x > 5

Rozhodující je podmínka x > 5 a té nevyhovuje druhý kořen .

Rovnice má pouze jedno řešení <u>**x = 7**</u> .

Cvičení

7. Řešte rovnici : $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4$

[3]

8. Řešte rovnici : $\binom{n}{3} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{3} = \frac{n^3}{2} + 88$

[6]

9. Řešte rovnici: $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \binom{x+1}{2}$ [řeš. jsou všechna x $\geq$ 2]

10. Řešte rovnici : $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 16$

[5]

11. Řešte rovnici : $\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-2}{n-4} = 4$

[4]

12. Řešte rovnici : $\binom{n-1}{n-3} - n = 8$

[7]

13. Řešte rovnici : $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{2} = 2.2!$

[4]

14. Řešte rovnici: $3\binom{n-1}{n-3} - 3\binom{n}{n-1} = 4!$

[7]

15. Řešte rovnici: $\binom{n+4}{n+2} - 2\binom{n}{n-1} = 8$

[1]

Kombinatorické pravidlo součinu

Nejlépe je vidět na úlohách typu:

Ve třídě je 24 dívek a 6 chlapců. Na sportovní utkání máme postavit družstvo, v němž jsou 4 dívky a 1 chlapec. Kolik je možností?

Řešení:

Z dívek tvoříme $C_4(24) = \binom{24}{4}$. Ke každé z těchto možností přidáme 1 chlapce – tedy dalších 6 možností – počet všech možností se zvětší 6 **krát**

Počet řešení je tedy $\binom{24}{4} \cdot 6 = \binom{24}{4} \cdot 6 = \frac{24!}{4!\cdot 20!} \cdot 6 = \frac{24.23.22.21.20!}{4.3.2.20!} \cdot 6 = 23.22.21.6 = 63756$

Platí:
Počet všech uspořádaných, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby atd až k tý člen n_k způsoby , je roven $\mathbf{n_1 \,.\, n_2 \,.\, n_3 \,.\, \ldots\ldots . n_k}$

V našem příkladě jsme tedy tvořili pouze uspořádané dvojice, kde na prvním místě byla skupina dívek a na druhém místě skupina chlapců.

Příklad:

Ve třídě je 24 dívek a 6 chlapců. Na sportovní utkání máme postavit družstvo, v němž jsou 4 dívky a 2 chlapci. Kolik je možností?

Řešení:

Dívky: $C_4(24) = \binom{24}{4}$

Chlapci: $C_2(6) = \binom{6}{2}$

Dohromady: $\binom{24}{4} \cdot \binom{6}{2} = \frac{24!}{4!\,20!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{24.23.22.21.20!}{4.3.2.20!} \cdot \frac{6.5.4!}{2.4!} = 23.22.21.15 = 159390$

Příklad:

Z písmen ABCDEFGHIJKLMNOPRSTUVZ máme vytvořit SPZ, v níž jsou obsažena tři písmena a čtyřmístné číslo. Kolik je možností? (uspořádání písmen není vázáno žádnými obecními pravidly)

Řešení:
Písmen je 22, číslic 10. Záleží na uspořádání a číslice i písmena se mohou opakovat. – jedná se o variace s opakováním.

$22^3 \cdot 10^4 = 106480000$

Smíšené úlohy:

Příklad:

Určete kolika způsoby lze sestavit rozvrh hodin na jeden den pro třídu, má-li být tento den na rozvrhu 6 hodin (každá jiná)a ve třídě se učí 11 předmětů. Bereme v úvahu pořadí předmětů.

Řešení:

n = 11 (11předmětů) - z těchto předmětů tvoříme uspořádané šestice

jedná se o variace 6. třídy z jedenácti prvků

$V_6(11) = 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 = 3326406$

Příklad:

V oddíle je 12 vojáků . Kolika způsoby z nich lze vytvořit dvojčlennou hlídku?

Řešení:

n = 12 - z těchto dvanácti prvků tvoříme dvouprvkové podmnožiny

jedná se o kombinace 2.třídy ze dvanácti prvků

$C_2(12)$ $= \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!.10!} = \frac{12.11.10!}{2.10!} = 6.11 = 66$

Příklad:

Kolik existuje trojciferných přirozených čísel, jež lze zapsat pouze užitím cifer 2,4,6,8 ?

Řešení:

V trojciferném čísle se cifry mohou libovolně opakovat, jedná se o variace třetí třídy ze čtyř prvků s opakováním: $V_3{}'(4) = 4^3 =$ **64**

Příklad:

Kolik existuje různých šesticiferných přirozených čísel , jež lze sestavit z cifer 0,1,2, ... , 9 ?

Řešení:

Z těchto cifer by se dalo sestavit $V_6{}'(10) = 10^6$ čísel. Čísla, která mají na začátku nulu však nemají smysl. Takových čísel je $V_5{}'(10) = 10^5$.

Výsledek je $10^6 - 10^5$ = **900 000** čísel.

Příklad:

Určete, kolika způsoby se může v šestimístné lavici posadit 6 žáků, jestliže dva chtějí sedět vedle sebe.

Řešení:

Tyto dva žáky vnímáme jako jednoho a jejich místo také jako jedno. Pouze rozlišujeme dva stavy, kdy jeden sedí vlevo a druhý vpravo a naopak:

Jedná se o permutace: $2 . P(5)=2 . 5! = 240$

Příklad:

Určete, kolika způsoby se může v šestimístné lavici posadit 6 žáků, jestliže dva chtějí sedět vedle sebe a třetí chce sedět na kraji.

Řešení:

Tyto dva žáky opět vnímáme jako jednoho a třetího žáka posadíme jednou na levý kraj a podruhé na pravý kraj:

$2. 2. P(4) = 4. 4! = 96$

Příklad:

Kufřík má dva heslové kotouče. Jeden na levé straně, na němž je třeba uhodnout trojčíslí, jeden na pravé straně, na němž je třeba uhodnout čtyřčíslí.

Kolik je možností jeho otevření?

Řešení:

$$V'_3(10) \cdot V'_4(10) = 10^3.10^4 = 10^7$$

Příklad:

Zákazník se v obchodě rozhoduje nad koupí kufříku. Mají na výběr ze dvou kusů za stejnou cenu. Jeden je jištěn dvěma třímístnými číselnými kódovými zámky po stranách, druhý jedním pětimístným kódovým zámkem s písmeny ABCDEFGHIJKLMNO. Který si má vybrat?

Řešení:

Číselný kufřík: $V'_3(10) \cdot V'_3(10) = 10^3.10^3 = 10^6$

Kufřík s písmeny: $V'_5(15) = 15^5 = 759375$

Je výhodnější vybrat kufřík s čísly.

Cvičení:

16. Kolika přímkami můžeme spojit 12 bodů , z nichž žádné tři neleží v jedné přímce?
[$C_2(12)$ = 66]

17. Kolika způsoby může být odměněno 1.,2.,3. cenou 15 účastníků soutěže?
[$V_3(15)$ = 2730]

18. Zvětšíme-li počet prvků o jeden , zvětší se počet variací druhé třídy o 18. Určete původní počet prvků.
[9]

19. Z kolika prvků lze vytvořit 420 variací druhé třídy?
[21]

20. Určete počet prvků, je-li počet kombinací druhé třídy bez opakování 91.
[14]

21. Kolik trojmístných čísel začínajících číslem 9 pro předvolbu v automatickém telefonním provozu je možno utvořit?

[$V'_2(10) = 100$]

22. Kolik je možných tipů ve Sportce, volíme-li jako jedno ze šesti čísel na každém tiketu číslo 7?

[$C_5(48) = 1\,,712\,304$]

23. Vypočtěte: $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}$ [15]

24. Vypočtěte: $\binom{6}{6} + \binom{7}{6} + \binom{8}{6} + \binom{9}{6} + \binom{10}{6}$ [330]

25. Řešte rovnici: $(x+1)! = 110 \,.\, (x-1)!$ [10]

26. Kolika způsoby můžeme z pěti barev vybrat tři?

[$C_3(5) = 10$]

27. Kolik náhrdelníků lze sestavit z deseti různých korálků?

$\left[\frac{10!}{2}\right]$

28. V kole tančí 7 dívek, kolika různými způsoby mohou být seřazeny v kruhu?

[6!]

29. Fotbalového utkání se zúčastní 8 družstev. Kolik zápasů bude sehráno, jestliže se družstva rozlosují do dvou čtyřčlenných skupin a v každé skupině bude hrát každý s každým, o první místo se utkají vítězové skupin a o třetí místo druzí s obou skupin?

[14]

30. Určete počet způsobů, kterými se do pětimístné lavice může rozesadit 5 žáků, jestliže dva chtějí sedět vedle sebe.

[2 . 4!]

31. Určete počet způsobů, kterými se do pětimístné lavice může rozesadit 5 žáků, jestliže jeden chce sedět na kraji.

[2 . 4!]

32. Určete počet způsobů, kterými může 10 osob obsadit pět různých funkcí.

[27518400]

33. Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až 4 prvcích.

[30]

34. Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici, těchto číslic je na každém kotouči 9. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli číslo. [59 049]

35. Odvoďte vztah pro počet úhlopříček v n- úhelníku.

[$\frac{n.(n-3)}{2}$]

36. Kolik přímek je určeno šesti body, jestliže žádné tři z nich neleží v jedné přímce?

[15]

37. Kolik přímek je určeno šesti body, jestliže tři z nich leží v jedné přímce?

[13]

38. Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 2, 3 ? [162]

39. Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.

[210]

40. Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.

[210]

41. Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.

[210]

42. Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.
[210]

43. Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou alespoň dvě ženy.
[371]

44. Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 3,5,7,9, každá nejvýše jednou.

[22]

Pascalův trojúhelník

Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ lze přehledně uspořádat do **Pascalova trojúhelníku**

n	$\binom{n}{k}$ je k- tý prvek v řádku n
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 * * * * * * * * * * * * * * * * * 1

****

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Pascalův trojúhelník je symetrický - obecně :
k - tý prvek v (r+1) řádku je součtem (k-1)-tého a k-tého prvku v r-tém řádku
Toto tvrzení lze zapsat vztahem:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Např.
V řádku začínajícím číslem 7 je na třetím místě číslo 21. Podíváme-li se o řádek výš na dvě čísla nejbližší našemu číslu, najdeme čísla 6 a 15. Jejich součtem je číslo 21.

V Pascalově trojúhelníku je dále vidět platnost rovnosti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomická věta

Pro každá dvě komplexní čísla **a , b** a každé celé kladné číslo **n** platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Tento vzorec nazýváme BINOMICKÝ ROZVOJ
Symbolicky můžeme zapisovat:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

Příklad:

Vypočtěte čtvrtý člen rozvoje výrazu $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$.

Řešení:
Hledáme čtvrtý člen rozvoje:

$$\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{8-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^k$$

Je to člen který má k = 3 :

$$\binom{8}{3}x^5\cdot\frac{8}{x^3} = \frac{8.7.6}{3.2}.8.x^5 = 448x^2$$

Příklad:
Určete (1 + i)^{10}

Řešení:
(1 + i)^{10} =

$$\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}.1^{10-k}.i^k = \binom{10}{0}+\binom{10}{1}.i+\binom{10}{2}i^2+\binom{10}{3}i^3+\binom{10}{4}i^4+\binom{10}{5}i^5+\binom{10}{6}i^6+\binom{10}{7}i^7+\binom{10}{8}i^8+\binom{10}{9}i^9+\binom{10}{10}i^{10} =$$

$$= 1+\frac{10!}{1.9!}.i+\frac{10!}{2.8!}(-1)+\frac{10!}{3!.7!}(-i)+\frac{10!}{4!.6!}+\frac{10!}{5!.5!}.i+\frac{10!}{6!.4!}.(-1)+\frac{10!}{7!.3!}.(-i)+\frac{10!}{8!.2!}+\frac{10!}{9!.1!}.i+\frac{10!}{10!.0!}.(-i) =$$

$$= 1+10i-45-120i+\frac{10.9.8.7}{4.3.2}+\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2}.i-\frac{10.9.8.7}{4.3.2}-\frac{10.9.8}{6}i+45+10i-1 =$$

$$= -100i+210+252i-210-120i = 32i$$

Cvičení:

1. Určete x z oboru kladných reálných čísel tak, aby pátý člen v binomickém rozvoji byl 105.

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$\left[x=\frac{1}{8}\right]$

2. Určete desátý člen binomického rozvoje mocniny $\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{20}$.

$\left[\binom{20}{9}\frac{\sqrt{x}}{x^3}\right]$

3. Který člen binomického rozvoje mocniny $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{14}$ obsahuje x^6 ?

[pátý]