24

Podobnost – stejnolehlost , úlohy využívající podobnost

Podobná zobrazení
Podobnost = zobzazení ve kterém existuje kladné reálné číslo k takové , že pro každou úsečku AB a její obraz A´B´platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$. Je-li $k > 1$ jedná se o zvětšení , je-li $k < 1$ jedná se o zmenšení , je-li $k = 1$ zobrazení je shodnost.

Stejnolehlost

Je dán libovolný bod S dané roviny ρ a libovolné kladné reálné číslo $k \neq 0$. Stejnolehlostje definována jako zobrazení , které každému bodu X přiřadí bod X ´tak že platí :

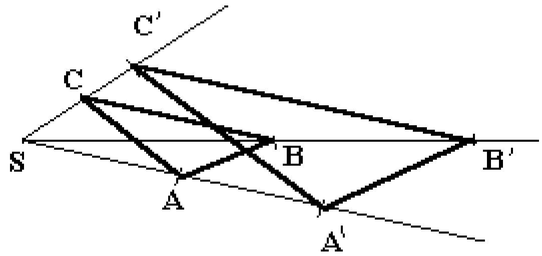
$$|SX'| = k \cdot |SX|$$

k - koeficient stejnolehlosti S - střed stejnolehlosti (je samodružný)

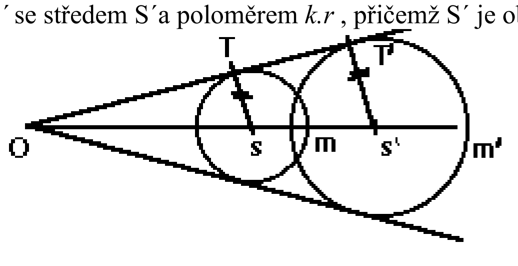
Příklad:
Je dán trojúhelník ABC a bod S. Sestrojte jeho obraz ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem k = 2.

Řešení:

Platí: $|SA'| = 2 \cdot |SA|$; $|SB'| = 2 \cdot |SB|$; $|SC'| = 2 \cdot |SC|$
Mělo by také platit: AC || A´C´ ; AB || A´B´ ; BC || B´C´
Výsledkem jsou dva podobné trojúhelníky.



Stejnolehlost kružnic:
Ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem *k* se zobrazí kružnice *m* se středem S a poloměrem *r* na kružnici *m´* se středem S´a poloměrem *k.r* , přičemž S´ je obrazem bodu S v dané stejnolehlosti.



Toto geometrické zobrazení využíváme zejména při **sestrojování společné tečny dvou kružnic**.
Máme-li dány dvě kružnice, kterým chceme sestrojit společnou tečnu, najdeme nejprve jejich střed stejnolehlosti a potom vedeme tečnu k jedné z kružnic z tohoto středu - tečna bude zároveň tečnou i druhé kružnice.

Podobnost trojúhelníků:

- Věta uu
  trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´ jsou podobné, když se shodují alespoň ve dvou úhlech
- Věta sus
  trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´ jsou podobné, shodují-li se poměry délek 2 sobě odpovídajících stran a úhly jimi sevřené
- Věta sss
  trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´ jsou podobné, shodují -li se poměry délek 3 sobě odpovídajících stran

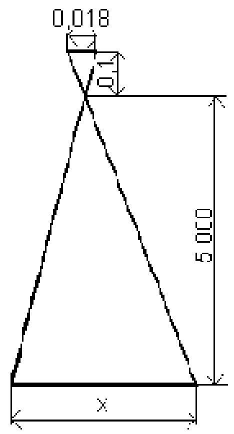
Příklad:
Z letadla ve výšce 5 km byla fotografována hráz přehrady fotoaparátem s ohniskovou délkou 10 cm. Na fotografii byla hráz dlouhá 18 mm. Určete délku hráze za předpokladu, že fotografická deska byla ve vodorovné poloze.

Řešení:
Jedná se o dva podobné rovnostranné trojúhelníky (podle věty uu).
Musí platit:

$$\frac{5000}{x} = \frac{0{,}1}{0{,}018}$$

$$x = \frac{0{,}018 \cdot 5000}{0{,}1} = 900 \text{ m}$$

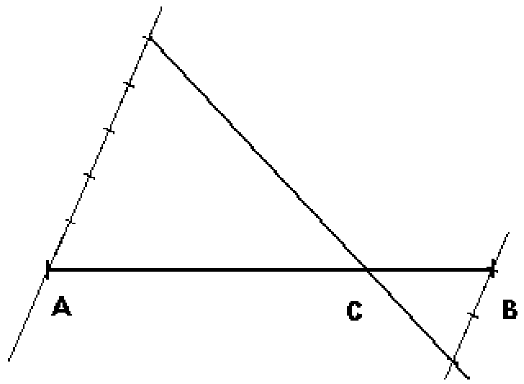
Hráz je dlouhá 900 m.



Příklad:

Danou úsečku AB rozdělte bodem C tak, aby platilo
$|AC| : |CB| = 5 : 2$.

Body AB vedeme rovnoběžné přímky dle obrázku. Úloha využívá podobnost podle věty uu



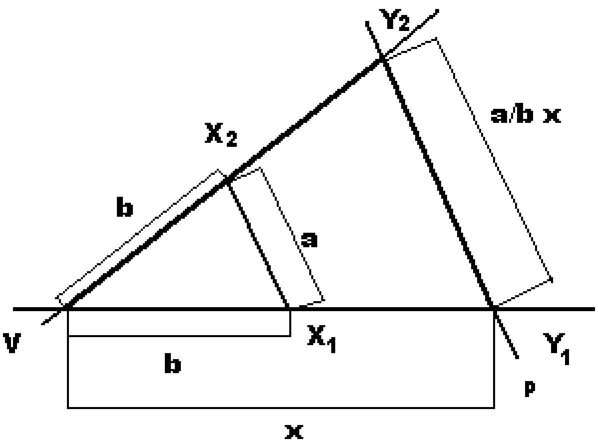
Při zvětšování nebo zmenšování technického výkresu v daném poměru a : b (a > b) využíváme tzv. **redukční úhel**.

Příklad:

Je dána úsečka AB délky x cm. Máme ji zvětšit v poměru a : b.

Řešení:
Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník VX_1X_2, kde $VX_1 = VX_2 = b$ cm, $X_1X_2 = a$ cm. Prodloužíme polopřímku VX_1 a naneseme na ni velikost x – získáme úsečku VY_1. Prodloužíme polopřímku VX_2. Bodem Y_1 vedeme rovnoběžku s úsečkou X_1X_2. Bod Y_2 je průsečíkem polopřímky VX_2 a této rovnoběžky.

Hledanou úsečkou je Y_1Y_2.



Cvičení:

1.) Přímá cesta rovnoměrně stoupá na každý metr o 10 cm. O kolik metrů stoupne cesta na vzdálenost 1250 m ? [125 m]

2.) Tovární komín vrhá na rovinu dvora stín dlouhý 40 m a v téže době vrhá svislá tyč délky 2 m stín dlouhý 3 m . Určete výšku továrního komína.
[26,66 m]

3.) Abychom mohli určit vzdálenost dvou navzájem nepřístupných míst A a B, sestrojíme trojúhelník AB_1C_1, kde změříme vzdálenosti AB_1 a AC_1. Určete vzdálenost AB, je-li AC = 121 m, AB_1 = 7 m, AC_1 = 11 m.

[77 m]

4.) Jeden ze dvou podobných trojúhelníků má obvod 100 cm, strany druhého jsou o 8, 14, a 18 cm větší než odpovídající strany prvního trojúhelníku. Určete délky stran obou trojúhelníků.

[první 20,35,45; druhý 28, 79, 63]

5.) Trojúhelník má stranu délky a = 36 cm a příslušnou výšku v_a = 15 cm. Určete a´; $v´_a$ v podobném trojúhelníku s obsahem S´= 120 cm^2.

[a´= 24, $v´_a$ = 10]

6.) Stín stromu má délku 9 m, stín nedaleké svislé metrové tyče je v tutéž dobu dlouhý 1,5 m. Určete výšku stromu.

[6 m]

7.) Určete měřítko mapy, jestliže trojúhelníkové pole o rozměrech 162,5 m; 117,5 m; 180 m je na mapě zakresleno jako trojúhelník o stranách 6,5 mm, 4,7 mm, 7,2 mm.

[1 : 25000]

8.) Pomocí redukčního úhlu zkraťte úsečky délek 4 cm, 8 cm, 12 cm, v poměru 5 : 11.

9.) Pomocí redukčního úhlu zvětšete úsečky délek 6 cm, 2 cm, 3 cm, v poměru 7 : 5.

10.) V blízkosti uhelného dolu byla nasypána kuželovitá hromada 15 m vysoká o spádu 2 : 5. Jak velký je poloměr kruhu zasypané země?

[37,5 m]