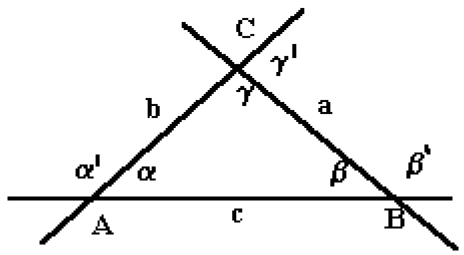
25

Trojúhelník a čtyřúhelník – výpočet jejich obsahu , konstrukční úlohy

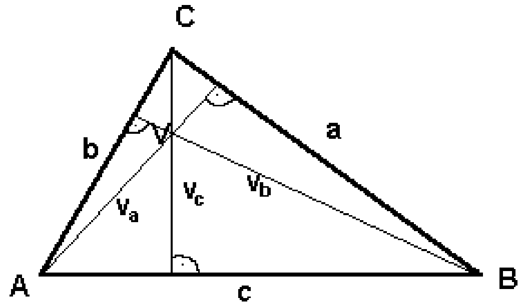
Trojúhelník:

Trojúhelník je definován jako průnik tří polorovin.
Pojmy:



ABC - vrcholy trojúhelníku
abc - strany trojúhelníku (a+b>c, a+c>b, b+c>a)
αβγ - vnitřní úhly trojúhelníku ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$)
α´β´γ´ - vnější úhly troj. ($\alpha + \alpha' = 180°$ - i pro ostatní)
($\alpha' = \beta + \gamma$ - i pro ostatní)

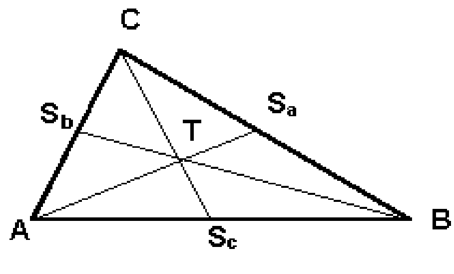
a) Výška v trojúhelníku:
- je to kolmice spuštěná z vrcholu na protilehlou stranu



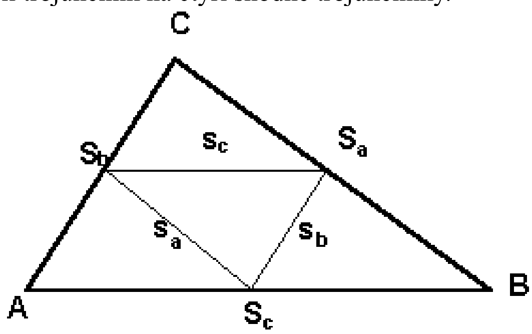
Výšky se protínají v jednom bodě - V - tento bod nemá žádný zvláštní význam , dokonce ani nemusí ležet uvnitř trojúhelníku

b) Těžnice v trojúhelníku:

- je to spojnice vrcholu a středu protilehlé strany. Průsečíkem těžnic je <u>těžiště</u> -dělí těžnici na dvě části v poměru 2 : 1 - těžiště leží blíže ke straně.



c) Střední příčky v trojúhelníku:
- spojují vždy dva středy stran. Jsou rovnoběžné se stranami, jejich velikost je rovna polovině velikosti stran. Dělí trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky.



d) Kružnice trojúhelníku opsaná:
- její střed najdeme jako průsečík os stran.

e) Kružnice trojúhelníku vepsaná:
- její střed najdeme jako průsečík os úhlů.

Zvláštní případy trojúhelníku - rovnoramenný, rovnostranný, pravoúhlý

<u>Konstrukce trojúhelníku:</u>

Konstrukční úloha má mít tyto části:
a) rozbor s náčrtkem
b) konstrukční zápis
c) vlastní konstrukci
d) diskusi o počtu řešení

<u>Cvičení:</u>

1. Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku ABC : $a = 6$, $\alpha = 60°$, $\gamma = 90°$.
2. Sestrojte těžiště, kružnici opsanou i vepsanou trojúhelníkům:
   a) $a = 6$; $b = 4$; $\gamma = 60°$
   b) $c = 7{,}5$; $\alpha = 15°$; $\beta = 75°$
   c) $a = 5{,}4$; $b = 6{,}1$; $c = 7{,}2$
3. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno :
   a) $c = 8$, $v_c = 4$, $t_c = 5$
   b) $c = 6$, $\alpha = 60°$, $\gamma = 75°$
   c) $c = 6$, $\gamma = 45°$, $t_c = 6$
   d) $c = 6$, $a = 4$, $t_a = 5$
   e) $a = 5$, $v_a = 4$, $t_b = 3$
   f) $a = 5$, $\beta = 45°$, $v_b = 3$
   g) $\alpha = 105°$, $a = 5$, $v_c = 4$
   h) $a = 5$, $b= 7$, $t_c = 4$
4. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno :
   a) $a = 5$, $\alpha = 60°$, $r = 4$
   b) $a + b = 10$, $v_a = 4$, $\gamma = 60°$
   c) $a + b + c = 8$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$
   d) $a = 6$, $v_b = 5$, $r = 4$
   e) $a + c = 9$, $v_a = 3$, $\beta = 30°$
   f) $a + b + c = 11$, $v_c = 3$, $\alpha = 45°$
5. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , je-li dán poloměr kružnice vepsané $\rho = 2$ cm . Jak velký je poloměr kružnice opsané?

   [r = 4 cm]

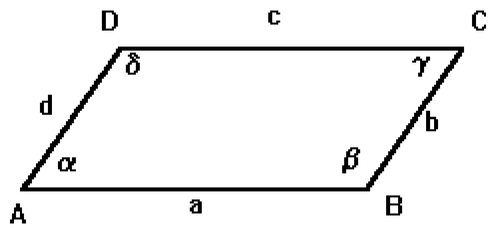
6. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dáno:
   a) $a = 5$, $t_a = 3$
   b) $a = 5$, $\rho = 1$
   c) $c - a = 6$, $\alpha = 30°$
   d) $b + c = 8$, $\alpha = 22°30'$
   e) $a + b = 5$, $c = 3{,}6$
   f) $c = 6$, $v_c = 2{,}5$

<u>Čtyřúhelník:</u>

- zaměříme se pouze na některé významné čtyřúhelníky

a) Rovnoběžník:

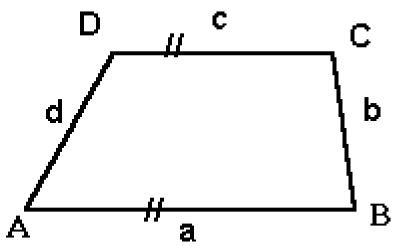
má vždy dvě protilehlé strany rovnoběžné a stejně dlouhé



Rovnoběžníky dělíme na:
a) kosodélník $a \neq b$, $\alpha \neq \beta$
b) kosočtverec $a = b$, $\alpha \neq \beta$
c) obdélník $a \neq b$, $\alpha = \beta = 90°$
d) čtverec $a = b$, $\alpha = \beta = 90°$

b) Lichoběžník:

- je to čtyřúhelník , který má dvě strany - **a , c** - rovnoběžné - nazývají se základny . Strany **b , d** se nazývají ramena



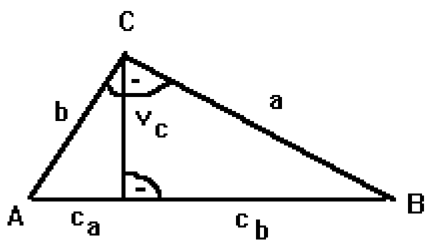
Vlastnosti čtyřúhelníků :
a) úhlopříčky
 - má dvě - obvykle se značí e , f , svírají spolu úhel ω
Úhlopříčky čtverce se navzájem půlí a jsou kolmé a stejně dlouhé, úhlopříčky obdélníku se navzájem půlí , jsou stejně dlouhé a nejsou kolmé , úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí , jsou kolmé a různě dlouhé, úhlopříčky kosodélníku se navzájem půlí, nejsou kolmé a jsou stejně dlouhé.

b) součet vnitřních úhlů:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Cvičení:
1. Sestrojte čtyřúhelník ABCD , je-li dáno:
   a) $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 2$, $\beta = 60°$
   b) $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$
   c) $a = 6$, $b = 4$, $\alpha = 75°$, $\beta = 105°$, $\gamma = 30°$
2. Sestrojte kosočtverec ABCD , je-li jeho strana AB = 4,5 cm a úhel DAB = 75°
3. Sestrojte kosočtverec o úhlopříčkách $u_1 = 7$ cm , $u_2 = 5$ cm.
4. Sestrojte kosodélník o úhlopříčkách $u_1 = 10$ cm , $u_2 = 9$ cm a jimi sevřeném úhlu $\omega = 60°$.
5. Sestrojte rovnoběžník, je-li:
   a) $v_a = 3$ cm , $v_b = 4$ cm , $\alpha = 60°$
   b) $a = 6$ cm , $u_1 = 8$ cm , $u_2 = 7$ cm
   c) $a + b = 10$ cm, $\alpha = 30°$, $v_a = 3$ cm
6. Sestrojte lichoběžník ABCD:
   a) $a = 10{,}5$ cm , $b = 3$ cm , $c = 5{,}5$ cm , $d = 4$ cm
   b) $a = 6$ cm , $b = 4$ cm , $c = 4$ cm , $d = 4{,}5$ cm
   c) $a = 6$ cm , $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$, $u_2 = 9$ cm
   d) $a = 6{,}5$ cm, $b = d = 4$ cm , $c = 2{,}5$ cm
   e) $a = 7$ cm, $\alpha = \beta = 60°$, $c = 4$ cm

Eukleidovy věty

Je dán **pravoúhlý** trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. V tomto trojúhelníku sestrojíme výšku v_c. Tato výška dělí přeponu c na dva úseky c_a (blíže straně a) a c_b (blíže straně b).



V trojúhelníku platí následující věty:
1. Euklidova věta o výšce: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$
2. Euklidova věta o odvěsně: $b^2 = c \cdot c_b$
   $a^2 = c \cdot c_a$

Z těchto vět je možno odvodit **Pythagorovu větu**: $a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c \cdot (c_a + c_b) = c^2$

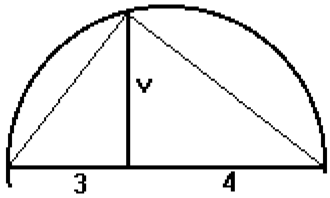
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Příklad:

Sestrojte úsečku velikosti $v = \sqrt{12}$.

Řešení:

K sestrojení použijeme Euklidovu větu o výšce. Sestrojíme úsečku velikosti 7. Najdeme její střed a sestrojíme nad ním Thaletovu kružnici (u vrcholu C musí být pravý úhel). Úsečku rozdělíme na dva úseky $c_a = 3$ a $c_b = 4$. V bodě, kterým jsme přeponu rozdělili vztyčíme kolmici na stranu c - výška v_c - má požadovanou velikost.



Cvičení

1. Vypočtěte délku odvěsny *b* pravoúhlého trojúhelníku ABC, je-li dáno a = 5 cm , c = 13 cm.
   [12 cm]
2. Vypočtěte délku výšky v_c v rovnoramenném trojúhelníku ABC, znáte-li délku základny c = 14,4 cm a délku ramene a = 12 cm.
   [9,6 cm]
3. Vypočtěte délku strany v rovnostranném trojúhelníku ABC, znáte-li délku jeho výšky v = 4,2 cm.
   [4,85 cm]
4. Vypočtěte délku delší úhlopříčky v kosočtverci, je-li dána délka strany a = 5,2 cm a délka kratší úhlopříčky u = 4 cm. [9,6]
5. Vypočtěte výšku rovnoramenného lichoběžníku ABCD (AB ǁ CD), jestliže a = 7 cm, b = 6 cm (rameno); c = 3 cm. [5,66]
6. Použitím Pythagorovy věty sestrojte postupně úsečky délek $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$
7. Do kružnice *k* o poloměru r = 6 cm je vepsán čtverec. Vypočtěte jeho obsah.
   [72,08 cm^2]
8. Vypočtěte délku základny c v pravoúhlém lichoběžníku ABCD (AB ǁ CD) s pravým úhlem při vrcholu B, jestliže a = 4 cm, b = 3,3 cm, d = 4 cm. [1,74 cm]
9. Vypočtěte délku úhlopříčky čtverce , jehož obsah je 33,64 dm^2.
   [8,2 dm]
10. V trojúhelníku ABC je dáno: b = 10,8 cm, t_b = 9 cm, a velikost úhlu BAC = 90°. Vypočtěte délku těžnice t_c.
    [11,38 cm]
11. Výslednice dvou navzájem kolmých sil působících v jednom bodě na těleso je F = 180 N. Jak velká musí být svislá síla F_2, je-li vodorovná síla F_1 = 144 N.
    [108 N]
12. Čtyřicet metrů vysoký stožár je ve třech čtvrtinách výšky připoután čtyřmi stejně dlouhými ocelovými lany. Kolik metrů ocelového lana bylo třeba, je-li ukotvení lan vzdáleno 12,5 m od paty stožáru?
    [130 m]
13. Parašutista vyskočil z letadla ve výšce 2 500 m nad místem A a při přímém letu vzduchem urazil dráhu 4 380 m. Jak daleko dopadl od místa A, předpokládáme-li, že je s místem dopadu v jedné rovině?
    [3 596 m]
14. Lze prostrčit krychli o hraně délky 26 cm kruhovou obručí s vnitřním průměrem 35 cm?
    [ne, u = 36,77 cm]
15. Jak daleko jsou od sebe hroty ručiček v 9 hodin? Velká ručička měří 9,6 mm, malá ručička měří 4 mm.

    [10,4 mm]

16. Výška v_c = 4cm pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým úhlem u vrcholu C vytíná na přeponě dva úseky c_a, c_b. Vypočtěte délku přepony víte-li, že c_a = 8 cm.
[10 cm]
17. Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C má přeponu c = 28 cm a odvěsnu b = 14 cm. Zjistěte délku úseků, které vytíná výška v_c na přeponě c.
[7 cm; 21 cm]
18. Vypočtěte obsah kosodélníka ABCD, jeli dáno: $|AB|$ = 12,5 cm, $|BC|$ = 7,5 cm, $|\sphericalangle BDA|$ = 90°.
[75 cm^2]
19. Použitím Euklidovy věty sestrojte úsečku velikosti $\sqrt{15}$.
20. Použitím Euklidovy věty sestrojte úsečku velikosti $\sqrt{13}$.
21. Sestrojte čtverec, jehož obsah je roven obsahu obdélníku o stranách a = 7 cm b = 2 cm. (bez výpočtu)
22. Trojúhelník má základnu 10 cm, výšku 7 cm.Převeďte jej graficky na čtverec téhož obsahu.
23. Vypočtěte délku tětivy v kružnici k[S;10 cm] , jejíž vzdálenost od středu S je 5 cm.
[$10\sqrt{3}$]

Obsahy a obvody rovinných útvarů

1.Čtverec

o = 4 . a
S = a^2
S = $\frac{1}{2}e^2$

2.Obdélník

o = 2 . (a + b)
S = a . b

3.Rovnoběžník

S = a. v (v = b . sin α) odtud
S = a.b. sin α
o = 2. (a + b)
(u kosočtverce platí S = $\frac{1}{2}$ e.f -- e,f - úhlopříčky)

Příklad:
Vypočtěte obsah rovnoběžníku, je-li a = 7 cm , b = 3 cm , α = 105°.
Řešení:
Pro dosazení do vzorce je lépe vypočítat druhý z dvojice sousedních úhlů - ostrý úhel α´= 180°- α
α´= 75°
Potom po dosazení do vzorce vypočteme S = a . b . sin α´
S = 7. 3. sin 75°= **20,3 cm^2**

Příklad:
Určete úhel, který svírají strany a = 5,1 cm kosočtverce o obsahu S = 20,8 cm^2.
Řešení:
Kosočteverec je rovnoběžník , který má všechny strany stejně velké - tedy a = b

$S = a^2 . \sin\alpha$ odtud $\sin\alpha = \frac{S}{a^2}$ po dosazení

$\sin\alpha = \frac{20,8}{5,1^2} = 0,79970$ **α= 53°06´**

4. Trojúhelník

o = a + b + c

$S = \frac{1}{2} z.v$

$S = \frac{1}{2} a.b.\sin\gamma$ (trojúhelník jako polovina rovnoběžníku)

Jsou - li dány tři strany trojúhelníku , je výhodné počítat jeho obsah pomocí Heronova vzorce:

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

kde **s** označuje polovinu obvodu

Je - li dán poloměr kružnice trojúhelníku opsané (r) vypočteme obsah podle vzorce:

$S = \dfrac{abc}{4r}$

Je - li dán poloměr kružnice trojúhelníku vepsané ( ) vypočteme obsah podle vzorce:

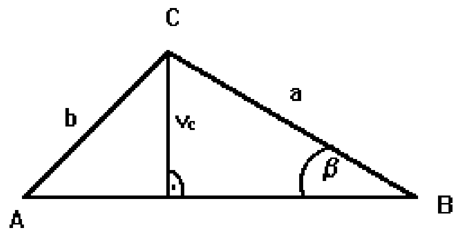
$S = \rho . s$ kde s udává opět polovinu obvodu

Příklad:

Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno a = 18 cm, b = 24 cm , β = 59°.

Řešení:

V daném trojúhelníku vypočteme velikost výšky v_c : v_c = a. sin β



v_c = 18.sin 59° v_c = 15,4

dále vypočteme velikost úhlu α: $\sin\alpha = \dfrac{v_c}{b}$

α = 40°

Úhel γ vypočteme ze vztahu : γ = 180° - α - β

γ = 81°

Nyní již můžeme dosadit do vzorce $S = \frac{1}{2} a.b.\sin\gamma$:

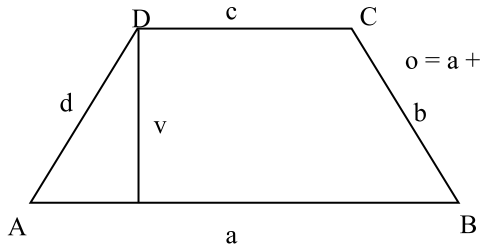
$S = \frac{1}{2} 18.24.\sin 81^\circ = 213{,}3 cm^2$

5. Lichoběžník

a II c

o = a + b + c + d

$S = \dfrac{(a+c).v}{2}$

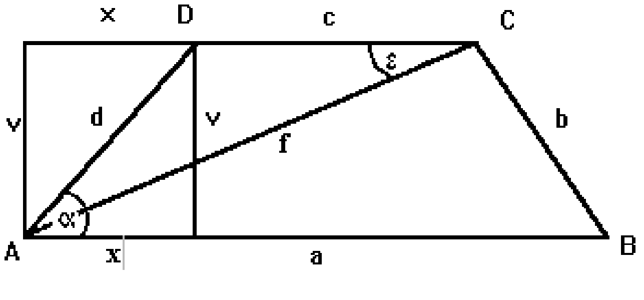


Příklad:

Určete obsah lichoběžníku ABCD , svírá-li jeho rameno AD = 15 cm se základnou AB = 26 cm úhel α = 30° a je-li úhlopříčka AC = 21 cm.

Řešení:

Pro dosazení do vzorce potřebujeme určit v a velikost základny CD.



$\sin\alpha = \dfrac{v}{d}$ $v = d . \sin\alpha$

$v = 15 . 0{,}5 = 7{,}5$

$x = d.\cos\alpha = 15.0{,}866 = 12{,}99$

$\sin\varepsilon = \dfrac{v}{f} \rightarrow \varepsilon = 20^\circ 55'$

$\cos\varepsilon = \dfrac{x+c}{f} \qquad c = f.\cos\varepsilon - x$

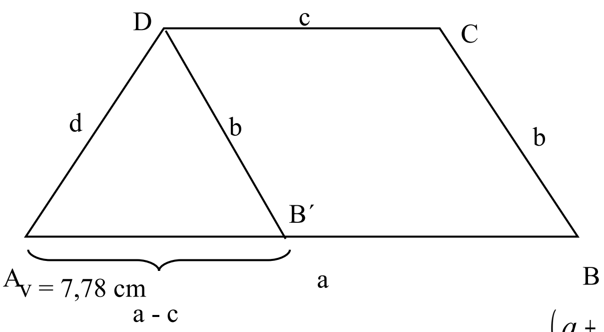
$c = 21.0,934 - 12,99 = 19061 - 12,99 = 6,62$

$S = \dfrac{(a+c).v}{2} \qquad S = \dfrac{(26+6,62).7,5}{2} = \dfrac{32,62.7,5}{2} = 122,36 cm^2$

<u>Příklad:</u>

Určete obsah lichoběžníku ABCD , jsou-li dány velikosti jeho stran a = 11 cm, b = 6 cm, c = 6 cm, d = 5 cm.

<u>Řešení:</u>



$v = 7,78$ cm

Nejprve vedeme z vrcholu D rovnoběžku se stranou d.
Získáme pomocný trojúhelník AB´D. Vypočteme Heronovým vzorcem jeho obsah:

$s = \dfrac{5+6+5}{2} = 8$

$S = \sqrt{8\cdot 3\cdot 2\cdot 3} = 19,46$

Z obsahu trojúhelníku vypočteme jeho výšku: $S = \dfrac{(a-c)\cdot v}{2}$

Nakonec vypočteme obsah lichoběžníku: $S = \dfrac{(a+c).v}{2} \qquad S = \dfrac{(11+6).7,78}{2} = 66,19 \ cm^2$

Cvičení:

1) Určete obvod a obsah rovnoběžníku:
   a) a = 4,2 ; b = 0,2a ; α = 17°50´
   b) a = 6,3 ; v_a = 2,8 ; α = 30°
   c) v_a = 5,7 ; α = 61° ; a : b = 2 : 1

   [a)10,08 ; 1,08 b)23,8 ; 17,64 c)39,1 ; 74,3]
2) Určete obvod rovnoběžníku s obsahem S = 100,1 cm^2 a se stranou a = 8,3 cm , svírající se stranou b úhel α= 70°.

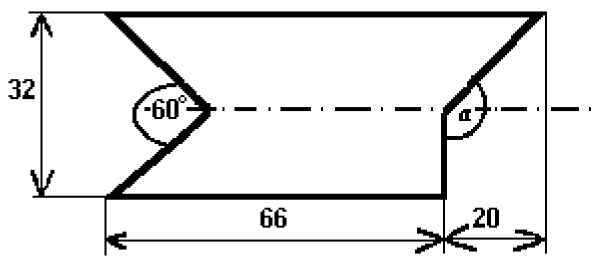
   [42,2]
3) Strany a a b rovnoběžníku svírají úhel α = 30°; obsah S = 10 cm^2 ; obvod o = 18 cm . Určete strany.

   [a = 4 ; b = 5]
4) Určete obsah a obvod trojúhelníku ABC:
   a) a = 5,3 ; v_a = 7,5 ; β = 70°
   b) a = 5,3 ; b = 7,5 ; γ = 51°30´
   c) a = 2,8 ; b = 3,25 ; c = 5,05
   d) b = 15,3 ; c = 21,5 ; α = 135°

   [a)19,875;21,21 b)15,55;18,7 c)13,25;11,1 d)116,3;70,9]
5) Je dána základna a = 5 cm a výška v = 8 cm ; určete obsah a obvod rovnoramenného trojúhelníku.

   [20; 21,76]
6) Určete obsah šablony:

   [1829 mm^2]
7) Plechové koryto (nahoře otevřené) má mít průřez tvaru rovnoramenného lichoběžníku s obsahem S = 500 cm^2 , s horní základnou a = 40 cm a výškou v = 20 cm . Určete šířku plechu , z něhož se má koryto vyrobit.



[60 cm]

8) Litinový sloup, jehož řezem je pravidelný pětiúhelník s délkou strany 1,9 cm je zatížen silou F = 600N . Vypočtěte zatížení na 1 cm^2 průřezu (měrný tlak).

[S = 6,097cm^2 ; p = 98,4 N/cm^2]

9) Určete obsah S a obvod o pravidelného n-úhelníku , je-li dáno:

a) n = 12 ; a = 7,6
b) n = 14 ; r = 12,1
c) n = 8 ; ρ = 203

[a) 646,7;91,2 b) 444,7;75,4 c) 136 550;1 345,4]

10) Betonová podpěra , jejímž průřezem je pravidelný 8 - úhelník se stranou a = 8 cm , má být nahrazena sloupem čtvercového průřezu (stejný materiál) . Určete délku strany nového průřezu tak, aby měrné zatížení bylo stejné. [17,58 cm]

11) V trojúhelníku ABC jsou dány strany a = 16 cm, b = 52 cm , c = 60 cm. Vypočtěte jeho výšky.

[v_a = 48 cm, v_b = 14,77 cm, v_c = 12,8 cm]

12) V trojúhelníku ABC jsou dány strany a = 65 mm, b = 100 mm, c = 115 mm. Vypočtěte obsah, vnitřní úhly , poloměr kružnice opsané a vepsané.

[S = 3 240 mm^2 ; α = 34°18´; β = 60°07´ ; γ = 85°35´;
r = 57,7mm ; ρ = 23,1 mm]

13) Vypočtěte stranu c a obsah trojúhelníku, je-li a = 12 cm, b = 14 cm a v_c = 8 cm.

[S = 81,73 cm^2 , c = 20,43 cm]

14) Obsah pravoúhlého trojúhelníku je S = 840 mm^2 , jeho přepona je c = 58 mm. Vypočtěte odvěsny a vnitřní úhly. [a = 40, b = 42 , α = 43°36´, β = 46°24´]

15) V kosočtverci jsou dány úhlopříčky u_1=5,4 cm, u_2= 7,2 cm .Vypočtěte obsah kosočtverce, jeho stranu a úhly. [S = 19,44 cm^2; a = 4,5 ; α = 73°44´; β = 106°16´]

16) V obdélníku je dána úhlopříčka u = 31,9 cm a úhel úhlopříček β = 49°35´. Vypočtěte obsah obdélníku a délky jeho stran .

[S = 387,48 cm^2, a = 28,96; b = 13,38]

17) Kolik procent obsahu rovnostranného trojúhelníku zaujímá jemu vepsaný čtverec? (Jedna strana čtverce leží na straně rovnostranného trojúhelníku.)

[49,7 %]

18) Vypočtěte obsah lichoběžníku o stranách a = 216 mm, b = 90 mm, c = 175 mm, d = 115 mm.

[S = 15 562 mm^2]

19) Vypočtěte obsah lichoběžníku o stranách a = 54 mm, b = 16 mm, c = 15 mm, d = 30 mm.

[S = 392,7 mm^2]

20) Vypočtěte obsah pravidelného pětiúhelníku , je-li dána jeho úhlopříčka u = 10 cm.

[65,72]

21) V rovnoramenném lichoběžníku je poměr základen a : c = 5 : 3 , rameno b = 26 cm a výška v = 24 cm . Vypočtěte základny, obsah a vnitřní úhly lichoběžníku.

[S = 960 ; a = 50 ; c = 30 ; α = 67°23´; β = 112°37´]

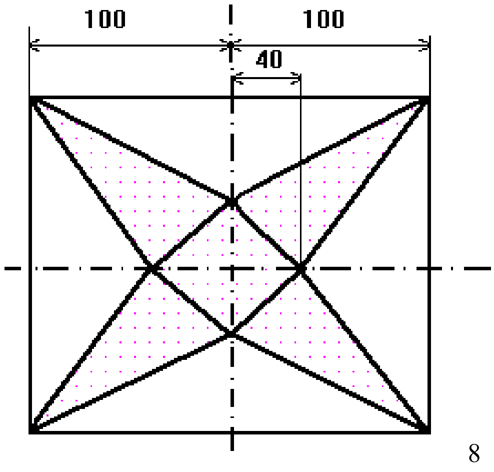
22) Vypočtěte stranu a obsah pravidelného sedmiúhelníku, je-li jeho nejkratší úhlopříčka u = 16,3 cm.

[a = 9,046 ; S = 297,4]

23) V pravoúhlém trojúhelníku ABC je součet odvěsen a + b = 41 cm a úhel β = 46°24´. Vypočtěte přeponu a obsah .

[c = 29 ; S = 210]

24) Vypočtěte obsah obrazce:



[16 000]