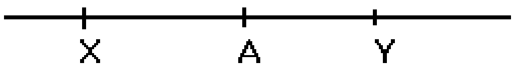
# *Základy geometrie - planimetrie*

*Základní pojmy* - bod (A, B, X, Y ....), přímka ( p , q , a ...... ), rovina ( α, β, π .... ) - nedefinují se

*Polopřímka:* bod dělí přímku na dvě polopřímky opačně orientované

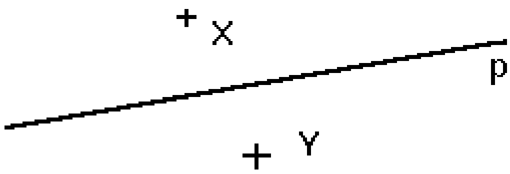



značíme je:

$\mapsto AX$

$\mapsto AY$

*Polorovina* : přímka dělí rovinu na dvě poloroviny opačně orientované

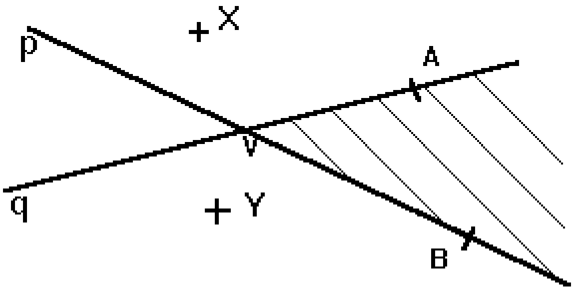



značíme je :

$\mapsto pX$

$\mapsto pY$

*Úhel:* definujeme jako průnik dvou polorovin určených dvěma různoběžnými přímkami:




úhel AVB:

V - vrchol úhlu

polopřímky $\mapsto VA, \mapsto VB$ tvoří ramena úhlu

Velikost úhlu měříme ve stupních nebo radiánech, úhly označujeme řeckými písmeny ... α, β , γ ......

Významné jsou úhly těchto velikostí : α = 90° - pravý úhel ( v radiánech $\alpha = \frac{\pi}{2}$ )

α = 180° - přímý úhel ( v radiánech α = π )

α = 360°- plný úhel ( v radiánech α = 2π )

Při převodu stupňů na radiány používáme tento vzorec:

$$\sigma = \frac{\alpha \, .\pi}{180}$$

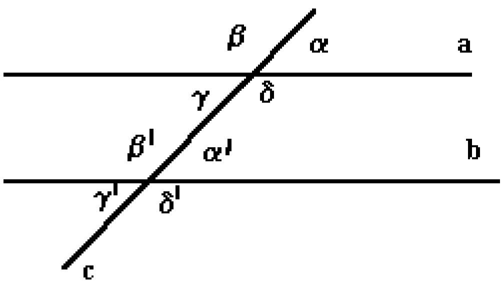
kde původní úhel α je ve stupních a výsledný úhel σ je v radiánech

Při převodu radiánů na stupně používáme tento vzorec:

$$\alpha = \frac{\sigma \, .180}{\pi}$$

kde původní úhel σ je v radiánech a výsledný úhel α je ve stupních

Názvy dvojic úhlů:




1) úhly souhlasné

α = α´ , β = β´, .....

2) úhly střídavé

α = γ´, β = δ´, .....

3) úhly vedlejší:

α β , α´ β´ ,...... platí α + β = 180°,

α´+ β´ = 180°,.....

4) úhly vrcholové:

α = γ , β = δ ,.........

Cvičení:

1. Převeďte ze stupňů na radiány:

a) $\alpha = 72°06'45''$ d) $\beta = 46°14'$

b) $\alpha = 23°25'$ e) $\beta = 16°56'$

c) $\alpha = 17°58'$ f) $\beta = 165°46'$

[ a) $\alpha =$ 1,2586 ; b) $\alpha =$ 0,4086 ; c) $\alpha =$ 0,3135 ; d) $\beta =$ 0,8069 ; e) $\beta =$ 0,2955 ; f) $\beta =$ 2,8932 ]

2. Převeďte z radiánů na stupně:

a) $\alpha = 1{,}156$ d) $\beta = 0{,}698$

b) $\alpha = 0{,}856$ e) $\beta = 2{,}657$

c) $\alpha = 0{,}999$ f ) $\beta = 1$

[ a) $\alpha =$ 66°14´02“ ; b) $\alpha =$ 49°02´42“ ; c) $\alpha =$ 57°14´18“ ; d) $\beta =$ 39°59´32“ ; e) $\beta =$ 152°14´05“ ; f ) $\beta =$ 57°17´45“ ]

3. Převeďte z obloukové míry na stupňovou:

a) $\alpha = \frac{5}{7}\pi$ c) $\alpha = \frac{6}{5}\pi$

b) $\alpha = 0{,}85\,\pi$ d) $\alpha = 2{,}36\pi$

[ a ) $\alpha =$ 128°34´17“ ; b) $\alpha =$ 153° ; c) $\alpha =$ 216° ; d ) $\alpha =$ 424°48´ ]

4. Proveďte operaci s úhly:

a) $\alpha = 12°46'$ ; $\beta = 46°47'$ $\alpha + \beta =$

b) $\alpha = 46°48'$ ; $\beta = 69°28'$ $\alpha + \beta =$

c) $\alpha = 78°15'$ ; $\beta = 23°46'$ $\alpha - \beta =$

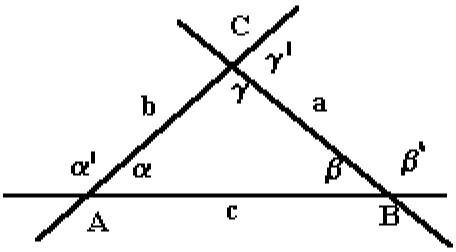
d) $\alpha = 156°27'$; $\beta = 28°49'$ $\alpha - \beta =$

[ a) 59°33´ ; b) 116°16´ ; c) 54°19´ ; d) 127°38´ ]

*<u>Trojúhelník:</u>*

Trojúhelník je definován jako průnik tří polorovin.

Pojmy:




ABC - vrcholy trojúhelníku

abc - strany trojúhelníku ( a+b>c, a+c>b, b+c>a )

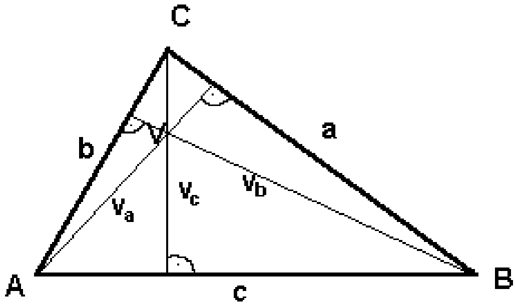
$\alpha\beta\gamma$ - vnitřní úhly trojúhelníku ( $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ )

$\alpha'\beta'\gamma'$ - vnější úhly troj. ( $\alpha + \alpha' = 180°$ - i pro ostatní )

( $\alpha' = \beta + \gamma$ - i pro ostatní )

a) Výška v trojúhelníku:

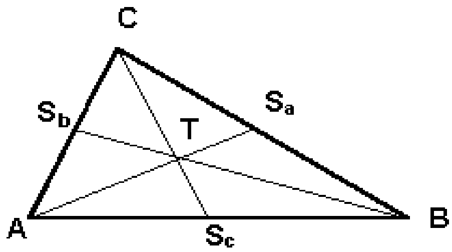
- je to kolmice spuštěná z vrcholu na protilehlou stranu



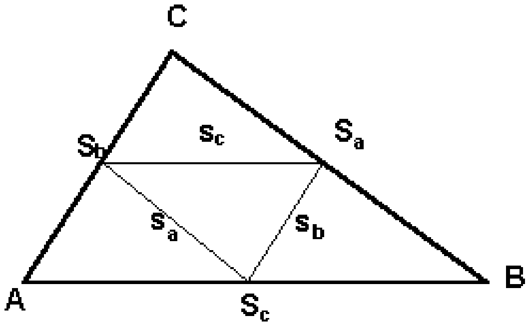

Výšky se protínají v jednom bodě - V - tento bod nemá žádný zvláštní význam , dokonce ani nemusí ležet uvnitř trojúhelníku

b) Těžnice v trojúhelníku:

- je to spojnice vrcholu a středu protilehlé strany. Průsečíkem těžnic je <u>těžiště</u> -dělí těžnici na dvě části v poměru 2 : 1 - těžiště leží blíže ke straně.



c) Střední příčky v trojúhelníku:
- spojují vždy dva středy stran. Jsou rovnoběžné se stranami, jejich velikost je rovna polovině velikosti stran. Dělí trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky.




d) Kružnice trojúhelníku opsaná:
- její střed najdeme jako průsečík os stran.

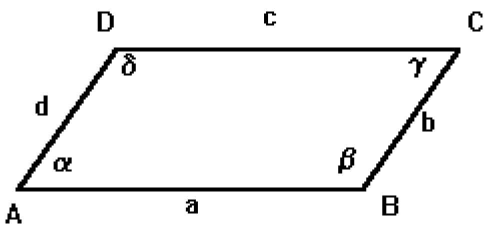
e) Kružnice trojúhelníku vepsaná:
- její střed najdeme jako průsečík os úhlů.

Zvláštní případy trojúhelníku - rovnoramenný, rovnostranný, pravoúhlý

<u>Konstrukce trojúhelníku:</u>
Konstrukční úloha má mít tyto části:
a) rozbor s náčrtkem
b) konstrukční zápis
c) vlastní konstrukci
d) diskusi o počtu řešení

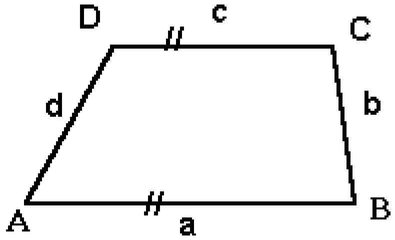
<u>Cvičení:</u>
1. Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku ABC : $a = 6$ , $\alpha = 60°$, $\gamma = 90°$ .
2. Sestrojte těžiště, kružnici opsanou i vepsanou trojúhelníkům:
   a) $a = 6$ ; $b = 4$ ; $\gamma = 60°$
   b) $c = 7{,}5$ ; $\alpha = 15°$; $\beta = 75°$
   c) $a = 5{,}4$ ; $b = 6{,}1$ ; $c = 7{,}2$
3. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno :
   a) $c = 8$ , $v_c = 4$ , $t_c = 5$
   b) $c = 6$ , $\alpha = 60°$, $\gamma = 75°$
   c) $c = 6$ , $\gamma = 45°$ , $t_c = 6$
   d) $c = 6$ , $a = 4$ , $t_a = 5$
   e) $a = 5$ , $v_a = 4$ , $t_b = 3$
   f) $a = 5$ , $\beta = 45°$ , $v_b = 3$
   g) $\alpha = 105°$, $a = 5$ , $v_c = 4$
   h) $a = 5$ , $b= 7$ , $t_c = 4$
4. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno :
   a) $a = 5$ , $\alpha = 60°$ , $r = 4$
   b) $a + b = 10$ , $v_a = 4$ , $\gamma = 60°$
   c) $a + b + c = 8$ , $\alpha = 30°$ , $\beta = 45°$
   d) $a = 6$ , $v_b = 5$ , $r = 4$
   e) $a + c = 9$ , $v_a = 3$, $\beta = 30°$
   f) $a + b + c = 11$ , $v_c = 3$ , $\alpha = 45°$
5. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , je-li dán poloměr kružnice vepsané $\rho = 2$ cm . Jak velký je poloměr kružnice opsané?
   [ r = 4 cm ]
6. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC , je-li dáno:
   a) $a = 5$ , $t_a = 3$
   b) $a = 5$ , $\rho = 1$
   c) $c - a = 6$ , $\alpha = 30°$
   d) $b + c = 8$ , $\alpha = 22°30'$
   e) $a + b = 5$ , $c = 3{,}6$
   f) $c = 6$ , $v_c = 2{,}5$

*<u>Čtyřúhelník:</u>*
- zaměříme se pouze na některé významné čtyřúhelníky
a) Rovnoběžník:
   má vždy dvě protilehlé strany rovnoběžné a stejně dlouhé




Rovnoběžníky dělíme na:
a) kosodélník $a \neq b$ , $\alpha \neq \beta$
b) kosočtverec $a = b$ , $\alpha \neq \beta$
c) obdélník $a \neq b$ , $\alpha = \beta = 90°$
d) čtverec $a = b$ , $\alpha = \beta = 90°$

b) Lichoběžník:
- je to čtyřúhelník , který má dvě strany - **a , c** - rovnoběžné - nazývají se základny . Strany **b , d** se nazývají ramena



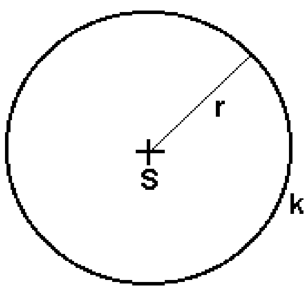

Vlastnosti čtyřúhelníků :
a) úhlopříčky
- má dvě - obvykle se značí e , f , svírají spolu úhel $\omega$
Úhlopříčky čtverce se navzájem půlí a jsou kolmé a stejně dlouhé, úhlopříčky obdélníku se navzájem půlí , jsou stejně dlouhé a nejsou kolmé , úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí , jsou kolmé a různě dlouhé, úhlopříčky kosodélníku se navzájem půlí, nejsou kolmé a jsou stejně dlouhé.
b) součet vnitřních úhlů:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

<u>Cvičení:</u>
1. Sestrojte čtyřúhelník ABCD , je-li dáno:
   a) $a = 4$ , $b = 3$ , $c = 5$ , $d = 2$ , $\beta = 60°$
   b) $a = 5$ , $b = 3$ , $c = 4$ , $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$
   c) $a = 6$ , $b = 4$ , $\alpha = 75°$ , $\beta = 105°$, $\gamma = 30°$
2. Sestrojte kosočtverec ABCD , je-li jeho strana AB = 4,5 cm a úhel DAB = 75°
3. Sestrojte kosočtverec o úhlopříčkách $u_1 = 7$ cm , $u_2 = 5$ cm.
4. Sestrojte kosodélník o úhlopříčkách $u_1 = 10$ cm , $u_2 = 9$ cm a jimi sevřeném úhlu $\omega = 60°$.
5. Sestrojte rovnoběžník, je-li:
   a) $v_a = 3$ cm , $v_b = 4$ cm , $\alpha = 60°$
   b) $a = 6$ cm , $u_1 = 8$ cm , $u_2 = 7$ cm
   c) $a + b = 10$ cm, $\alpha = 30°$, $v_a = 3$ cm
6. Sestrojte lichoběžník ABCD:
   a) $a = 10{,}5$ cm , $b = 3$ cm , $c = 5{,}5$ cm , $d = 4$ cm
   b) $a = 6$ cm , $b = 4$ cm , $c = 4$ cm , $d = 4{,}5$ cm
   c) $a = 6$ cm , $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$ , $u_2 = 9$ cm
   d) $a = 6{,}5$ cm, $b = d = 4$ cm , $c = 2{,}5$ cm
   e) $a = 7$ cm, $\alpha = \beta = 60°$ , $c = 4$ cm

*<u>Pravidelný mnohoúhelník</u>* :
- obvykle jej vepisujeme nebo opisujeme kružnici.
Můžeme jej rozložit na **n** rovnoramenných trojúhelníků, jejichž základna je strana mnohoúhelníku , rameno tvoří poloměr kružnice opsané a výška poloměr kružnice vepsané , s úhlem u vrcholu S $\omega = 360°/ n$ .

*<u>Kružnice:</u>*

- je to množina všech bodů v rovině které mají stejnou vzdálenost od daného bodu S.



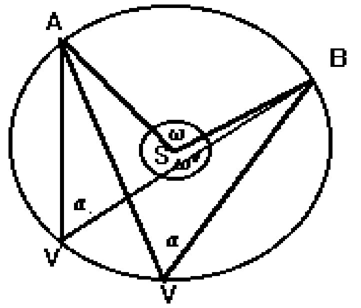
## *Přímka a kružnice:*

- mohou nastat tyto případy vzájemné polohy:

- $p$ a $k$ nemají žádný společný bod - vnější přímka
- $p$ a $k$ mají 1 společný bod - tečna
- $p$ a $k$ mají 2 společné body - sečna

## *Středový a obvodový úhel*

Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r. Na kružnici leží dva body A , B .Tyto dva body dělí kružnici na dva oblouky - větší a menší ( výjimečně i stejné ) .




úhel ω = < ASB - konvexní středový úhel ( přísluší menšímu oblouku )

ω´ = < ASB - nekonvexní středový úhel ( přísluší většímu oblouku )

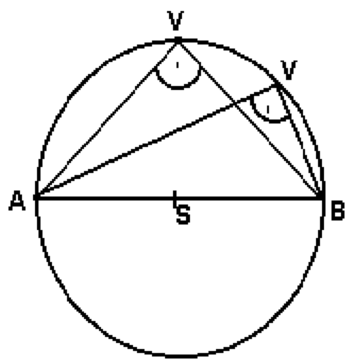
Bod V leží na větším oblouku - tvoří úhel α :

α = < AVB - obvodový úhel

Bod V můžeme volit libovolným způsobem na větším oblouku kružnice k a úhel α má stále stejnou velikost.

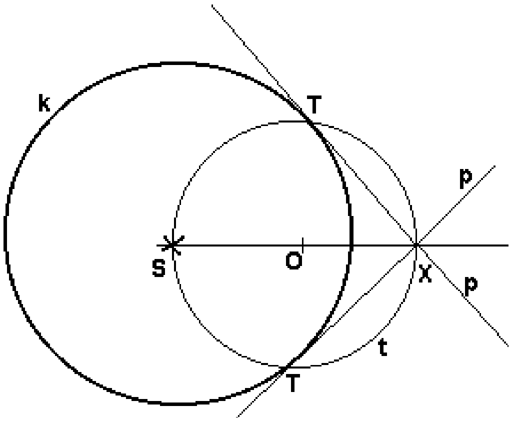
Platí : $\alpha = \frac{1}{2}.\omega$

Zvláštním případem věty o středových a obvodových úhlech je **Thaletova kružnice**:
středový úhel zde má velikost 180°, obvodovým úhlem je pravý úhel, body A a B tvoří krajní body průměru




Využití Thaletovy kružnice:

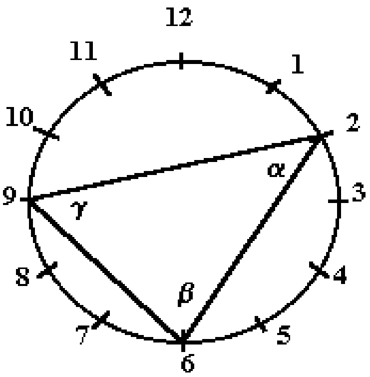
Je dána kružnice k(S, r). Je třeba vést k této kružnici tečnu z bodu X ležícího mimo kružnici. Je nepřípustné náhodně položit pravítko a tečnu sestrojit odhadem. Musíme nejprve určit bod dotyku. Tečna je kolmice na poloměr kružnice, pravý úhel v bodě dotyku nám zajistí Thaletova kružnice. Nejprve najdeme střed úsečky SX - bod O. Potom opíšeme kružnici t(O, r = |SO| ). Bod dotyku tečny a kružnice k je právě průsečík obou kružnic.



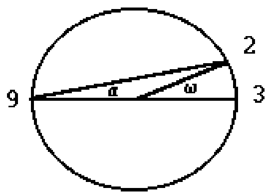

Příklad:

Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, který vznikne spojením čísel 2 , 6 , 9 na hodinovém ciferníku.

Řešení:




Sestrojíme pomocný obrázek:




ω je středový úhel příslušející 1 dílku na ciferníku:

$\omega = 360°: 12 = 30°$

α je k němu úhel obvodový $\alpha = 15°$

U každého vnitřního úhlu v trojúhelníku musíme určit, kolik dílků leží mezi koncovými body jeho ramen:

α .... 3 dílky .....$\alpha = 3 \cdot 15° = 45°$

β ..... 5 dílků .....$\beta = 5 \cdot 15° = 75°$

γ ...... 4 dílky ....$\gamma = 4 \cdot 15° = \underline{60°}$

180°

Příklad:

Určete geometrické místo bodů, z nichž je danou úsečku vidět pod úhlem α .

Řešení:

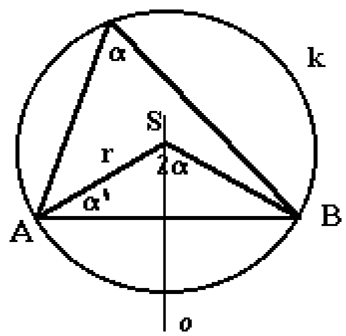
Nejprve sestrojíme úsečku AB . Potom výpočtem určíme úhel α´:

$\alpha' = (180° - 2\alpha) : 2 = 90° - \alpha$

Vypočtený úhel sestrojíme podle obrázku. Dále sestrojíme osu bodů AB a najdeme bod S.

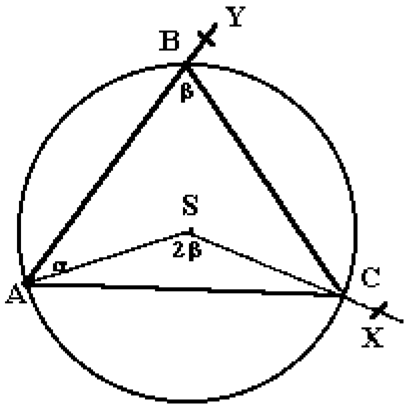
Opíšeme kružnici k se středem S tak, aby body A i B na ní ležely.

Větší oblouk tvoří množinu všech bodů, z nichž je danou úsečku vidět pod úhlem α.



Příklad:
Sestrojte trojúhelník ABC je -li dáno $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$, r = 3 cm ( poloměr kružnice opsané).

Řešení:




Konstrukce:
1) k ; k(S, r = 3 cm)
2) A ; $A \in k$
3) < ASX ; $|\sphericalangle ASX| = 2\beta$
4) C ; $C \in k \cap \rightarrow SX$
5) $\alpha$ ; $\alpha = \sphericalangle CAY$
6) B ; $B \in k \cap \rightarrow AY$
7) $\Delta$ ABC

## *Geometrická zobrazení*

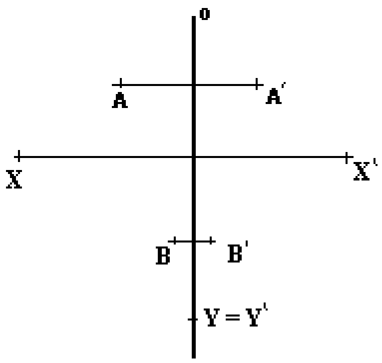
**1) Shodná zobrazení:**

a) *Identita*

je to geometrické zobrazení, které každému bodu X přiřazuje jako obraz tentýž bod X´. Každý bod v tomto zobrazení je samodružný.

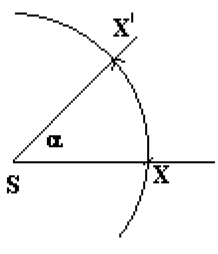
b) *Osová souměrnost*

je to takové zobrazení, které každému bodu X (vzor ) přiřazuje bod X´ ( obraz ) podle obrázku. Všechny úsečky XX´mají společnou osu o . Všechny body ležící na ose o jsou samodružné.



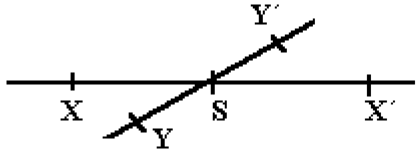

c) *Otočení*

je to geometrické zobrazení, které je určeno středem S a úhlem $\alpha$. Bodu X je přiřazen obraz X´, tak, že platí $|XS| = |X'S|$ a $\sphericalangle XSX' = \alpha$.
Střed otočení je samodružný.




d) *Středová souměrnost*

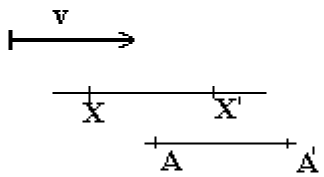
je to otočení s úhlem $\alpha = 180°$




e) *Posunutí*

je to geometrické zobrazení, které každému bodu X přiřazuje obraz X´tak, že všechny uspořádané dvojice [ X , X´ ] určují týž vektor v = XX´.

Vektor XX´se nazývá vektor posunutí .




**<u>2) Podobná zobrazení</u>**

Podobnost = zobrazení ve kterém existuje kladné reálné číslo k takové , že pro každou úsečku AB a její obraz A´B´platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$ . Je-li $k > 1$ jedná se o zvětšení , je-li $k < 1$ jedná se o zmenšení , je-li $k = 1$ zobrazení je shodnost.

*Stejnolehlost*

Je dán libovolný bod S dané roviny ρ a libovolné kladné reálné číslo $k \neq 0$ . Stejnolehlost je definována jako zobrazení , které každému bodu X přiřadí bod X ´tak že platí :

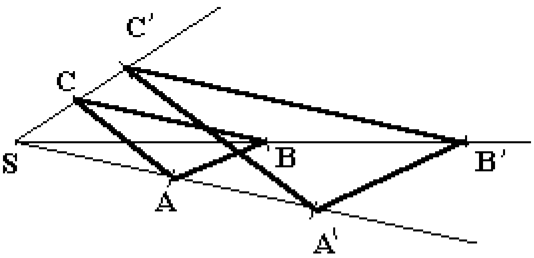
$$|SX'| = k \cdot |SX|$$

k - koeficient stejnolehlosti S - střed stejnolehlosti ( je samodružný )

<u>Příklad:</u>

Je dán trojúhelník ABC a bod S. Sestrojte jeho obraz ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem k = 2.

<u>Řešení:</u>



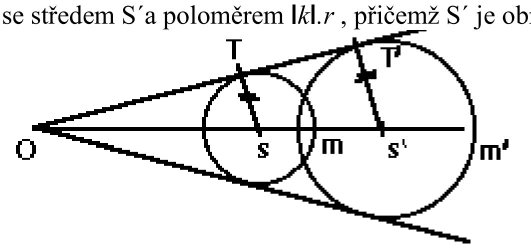

Platí: $|SA'| = 2 \cdot |SA|$ ; $|SB'| = 2 \cdot |SB|$ ; $|SC'| = 2 \cdot |SC|$

Mělo by také platit: AC | | A´C´ ; AB | | A´B´ ; BC | | B´C´

Výsledkem jsou dva podobné trojúhelníky.

*<u>Stejnolehlost kružnic:</u>*

Ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem *k* se zobrazí kružnice *m* se středem S a poloměrem *r* na kružnici *m*´ se středem S´a poloměrem $|k| \cdot r$ , přičemž S´ je obrazem bodu S v dané stejnolehlosti.




Toto geometrické zobrazení využíváme zejména při **sestrojování společné tečny dvou kružnic**.

Máme-li dány dvě kružnice, kterým chceme sestrojit společnou tečnu, najdeme nejprve jejich střed stejnolehlosti a potom vedeme tečnu k jedné z kružnic z tohoto středu - tečna bude zároveň tečnou i druhé kružnice.

## *Podobnost trojúhelníků:*

- Věta <u>uu</u>
  trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´ jsou podobné, když se shodují alespoň ve dvou úhlech
- Věta <u>sus</u>
  trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´ jsou podobné, shodují-li se poměry délek 2 sobě odpovídajících stran a úhly jimi sevřené
- Věta <u>sss</u>
  trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´ jsou podobné, shodují -li se poměry délek 3 sobě odpovídajících stran

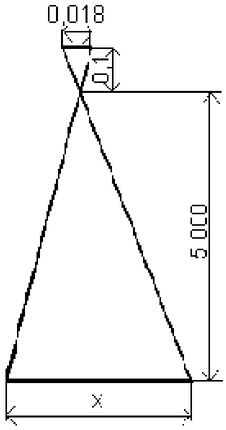
<u>Příklad:</u>
Z letadla ve výšce 5 km byla fotografována hráz přehrady fotoaparátem s ohniskovou délkou 10 cm. Na fotografii byla hráz dlouhá 18 mm. Určete délku hráze za předpokladu, že fotografická deska byla ve vodorovné poloze.

<u>Řešení:</u>
Jedná se o dva podobné rovnostranné trojúhelníky ( podle věty uu ).
Musí platit:

$$\frac{5000}{x} = \frac{0{,}1}{0{,}018}$$

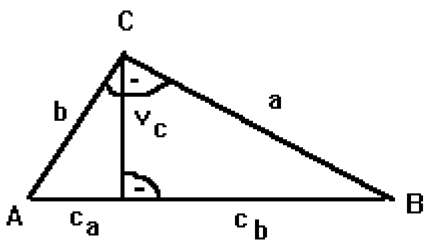
$$x = \frac{0{,}018 \cdot 5000}{0{,}1} = 900 \text{ m}$$

Hráz je dlouhá 900 m.




## *Euklidovy věty*

Je dán **pravoúhlý** trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. V tomto trojúhelníku sestrojíme výšku $v_c$. Tato výška dělí přeponu c na dva úseky $c_a$ ( blíže straně a ) a $c_b$ ( blíže straně b ).



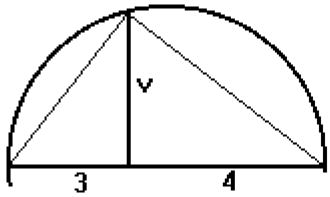

V trojúhelníku platí následující věty:

1. Euklidova věta o výšce: $v_c^2 = c_a \,.\, c_b$
2. Euklidova věta o odvěsně: $b^2 = c \,.\, c_b$
   $a^2 = c \,.\, c_a$

Z těchto vět je možno odvodit **Pythagorovu větu**: $a^2 + b^2 = c \,.\, c_a + c \,.\, c_b = c.\,(c_a + c_b) = c^2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

<u>Příklad:</u>
Sestrojte úsečku velikosti $v = \sqrt{12}$ .
<u>Řešení:</u>
K sestrojení použijeme Euklidovu větu o výšce. Sestrojíme úsečku velikosti 7. Najdeme její střed a sestrojíme nad ním Thaletovu kružnici ( u vrcholu C musí být pravý úhel ). Úsečku rozdělíme na dva úseky $c_a = 3$ a $c_b = 4$. V bodě, kterým jsme přeponu rozdělili vztyčíme kolmici na stranu c - výška $v_c$ - má požadovanou velikost.




Cvičení:

1. Na hodinovém ciferníku spojte čísla 2, 8, 11 . V takto vzniklém trojúhelníku vypočtěte vnitřní úhly.
2. Na hodinovém ciferníku spojte čísla 1, 7, 11 . V takto vzniklém trojúhelníku vypočtěte vnitřní úhly.
3. Na hodinovém ciferníku spojte čísla 4, 8, 14 . V takto vzniklém trojúhelníku vypočtěte vnitřní úhly.
4. Sestrojte trojúhelník ABC , a= 7 , b= 6 , c = 8. Mimo trojúhelník sestrojte libovolnou přímku p . Sestrojte obraz trojúhelníku v osové souměrnosti určené osou p.
5. Sestrojte obdélník ABCD - a = 8 , b = 4 . V tomto obdélníku najděte střed strany AB - označte jej S . Zobrazte trojúhelník ve středové souměrnosti určené středem S.
6. Sestrojte trojúhelník KLM . Najděte střed strany KL - označte jej R . Najděte obraz trojúhelníku KLM v otočení určeném středem R a úhlem 60°.
7. Sestrojte čtverec ABCD , a = 6 . Najděte střed úhlopříček čtverce - označte jej E . Najděte obraz čtverce v posunutí určeném vektorem $\vec{EB}$ .
8. Sestrojte kružnici k se středem S a poloměrem r = 4 cm . Na kružnici zvolte libovolný bod A . Sestrojte obraz kružnice v středové souměrnosti se středem A.
9. Sestrojte libovolně dvě různoběžky a , b . Dále sestrojte kružnici se středem S a poloměrem r = 4 cm tak, aby se obou různoběžek dotýkala.
10. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $v_c$ = 5 cm ; a : b : c = 2 : 3 : 4.
11. Jsou dány rovnoběžky p , q a bod A , který neleží na žádné z nich. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby B ležel na p a C na q.
    [úloha na otočení ]
12. Sestrojte trojúhelník ABC , a = 6 cm , b = 7 cm , c = 5 cm. Mimo tento trojúhelník zvolte libovolně bod S a zobrazte tento trojúhelník ve stejnolehlosti určené středem S a koeficientem k = 0,5.
13. Sestrojte kružnici *k* se středem S a poloměrem r = 4 cm . Dále sestrojte úsečku SL velikosti 7 cm. Sestrojte kružnici *m* se středem L a poloměrem r = 2 cm . Těmto kružnicím veďte společnou tečnu.
14. Sestrojte všechny společné tečny kružnic $k_1[S_1;4\text{ cm}]$ , $k_2[S_2;3\text{ cm}]$ , je-li $S_1S_2$ = 9 cm.
15. Vypočtěte délku odvěsny *b* pravoúhlého trojúhelníku ABC, je-li dáno a = 5 cm , c = 13 cm.
    [ 12 cm ]
16. Vypočtěte délku výšky $v_c$ v rovnoramenném trojúhelníku ABC, znáte-li délku základny c = 14,4 cm a délku ramene a = 12 cm.
    [ 9,6 cm ]
17. Vypočtěte délku strany v rovnostranném trojúhelníku ABC, znáte-li délku jeho výšky v = 4,2 cm.
    [ 4,85 cm ]
18. Vypočtěte délku delší úhlopříčky v kosočtverci, je-li dána délka strany a = 5,2 cm a délka kratší úhlopříčky u = 4 cm. [ 9,6 ]
19. Vypočtěte výšku rovnoramenného lichoběžníku ABCD ( AB $\parallel$ CD ), jestliže a = 7 cm, b = 6 cm ( rameno ); c = 3 cm. [ 5,66 ]
20. Použitím Pythagorovy věty sestrojte postupně úsečky délek $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$
21. Do kružnice *k* o poloměru r = 6 cm je vepsán čtverec. Vypočtěte jeho obsah.
    [ 72,08 $cm^2$ ]

22. Vypočtěte délku základny c v pravoúhlém lichoběžníku ABCD ( $AB \parallel CD$ ) s pravým úhlem při vrcholu B, jestliže a = 4 cm, b = 3,3 cm, d = 4 cm. [ 1,74 cm ]

23. Vypočtěte délku úhlopříčky čtverce , jehož obsah je 33,64 $dm^2$.
[ 8,2 dm ]

24. V trojúhelníku ABC je dáno: b = 10,8 cm, $t_b$ = 9 cm, a velikost úhlu BAC = 90°. Vypočtěte délku těžnice $t_c$.
[ 11,38 cm ]

25. Výslednice dvou navzájem kolmých sil působících v jednom bodě na těleso je F = 180 N. Jak velká musí být svislá síla $F_2$, je-li vodorovná síla $F_1$ = 144 N.
[ 108 N ]

26. Čtyřicet metrů vysoký stožár je ve třech čtvrtinách výšky připoután čtyřmi stejně dlouhými ocelovými lany. Kolik metrů ocelového lana bylo třeba, je-li ukotvení lan vzdáleno 12,5 m od paty stožáru?
[ 130 m ]

27. Parašutista vyskočil z letadla ve výšce 2 500 m nad místem A a při přímém letu vzduchem urazil dráhu 4 380 m. Jak daleko dopadl od místa A, předpokládáme-li, že je s místem dopadu v jedné rovině?
[ 3 596 m ]

28. Lze prostrčit krychli o hraně délky 26 cm kruhovou obručí s vnitřním průměrem 35 cm?
[ ne, u = 36,77 cm ]

29. Jak daleko jsou od sebe hroty ručiček v 9 hodin? Velká ručička měří 9,6 mm, malá ručička měří 4 mm.

[ 10,4 mm ]

30. Výška $v_c$ = 4cm pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým úhlem u vrcholu C vytíná na přeponě dva úseky $c_a$, $c_b$. Vypočtěte délku přepony víte-li, že $c_a$ = 8 cm.
[ 10 cm ]

31. Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C má přeponu c = 28 cm a odvěsnu b = 14 cm. Zjistěte délku úseků, které vytíná výška $v_c$ na přeponě c.
[ 7 cm; 21 cm ]

32. Vypočtěte obsah kosodélníka ABCD, jeli dáno: $|AB| = 12{,}5$ cm, $|BC| = 7{,}5$ cm, $|\sphericalangle BDA| = 90°$.
[ 75 $cm^2$ ]

33. Použitím Euklidovy věty sestrojte úsečku velikosti $\sqrt{15}$.

34. Použitím Euklidovy věty sestrojte úsečku velikosti $\sqrt{13}$.

35. Sestrojte čtverec, jehož obsah je roven obsahu obdélníku o stranách a = 7 cm b = 2 cm. ( bez výpočtu )

36. Trojúhelník má základnu 10 cm, výšku 7 cm.Převeďte jej graficky na čtverec téhož obsahu.

37. Vypočtěte délku tětivy v kružnici k[S;10 cm] , jejíž vzdálenost od středu S je 5 cm.
[ $10\sqrt{3}$ ]

## Úlohy využívající podobnost

### *Podobnost trojúhelníků*

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, právě když existuje kladné číslo $k$ tak, že pro jejich strany platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|, |A'C'| = k \cdot |AC|, |B'C'| = k \cdot |BC|$.

Číslo $k$ se nazývá koeficient podobnosti.

Příklad:

Rozhodněte, zda jsou podobné trojúhelníky: ABC a = 12cm, b = 18 cm, c = 24 cm.

KLM k = 10 cm, l = 15 cm, m = 20 cm

**Věty o podobnosti trojúhelníků:**

- **Věta u u**

  Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.

Příklad:

Trojúhelník ABC má úhly $\alpha = 38°$, $\beta = 55°$, trojúhelník KLM má úhly $\mu = 55°$, $\kappa = 87°$.

- **Věta s u s**

  Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v poměru délek dvou stran a úhlu jimi sevřeném.

Příklad:

Trojúhelník ABC má úhel $\alpha = 74°$, c = 40 mm,b = 60 mm, trojúhelník KLM má úhel $\mu = 74°$, l = 30m, k = 45 m.

- **Věta s s s**

  Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v poměru délek všech stran .

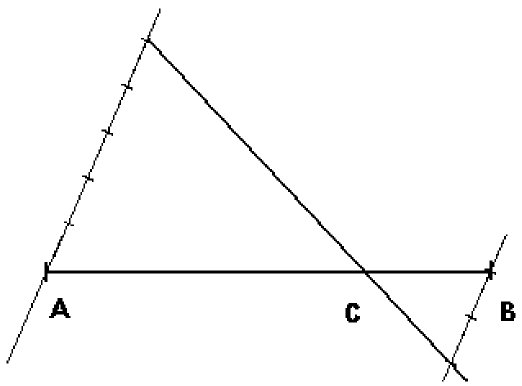
Příklad:

Trojúhelník ABC má strany a = 32 mm, c = 40 mm,b = 64 mm, trojúhelník KLM má strany k =36 , l = 45m, m = 72 m.

Příklad:

Danou úsečku AB rozdělte bodem C tak, aby platilo $|AC| : |CB| = 5 : 2$.

Body AB vedeme rovnoběžné přímky dle obrázku. Úloha využívá podobnost podle věty uu



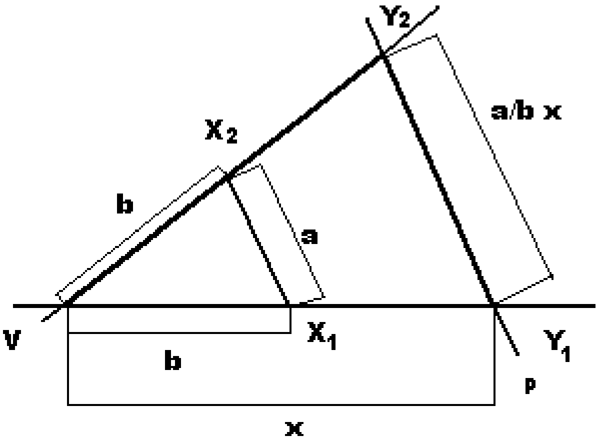

Při zvětšování nebo zmenšování technického výkresu v daném poměru a : b ( a > b ) využíváme tzv. **redukční úhel**.

Příklad:

Je dána úsečka AB délky x cm. Máme ji zvětšit v poměru a : b.

Řešení:
Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $VX_1X_2$, kde $VX_1 = VX_2$ = b cm, $X_1X_2$ = a cm. Prodloužíme polopřímku $VX_1$ a naneseme na ni velikost x – získáme úsečku $VY_1$. Prodloužíme polopřímku $VX_2$. Bodem $Y_1$ vedeme rovnoběžku s úsečkou $X_1X_2$. Bod $Y_2$ je průsečíkem polopřímky $VX_2$ a této rovnoběžky.

Hledanou úsečkou je $Y_1Y_2$.



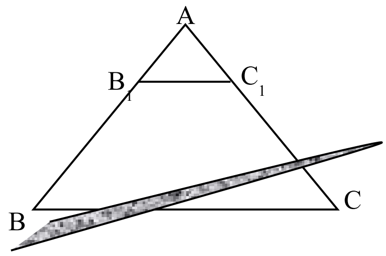

Cvičení:

38. Přímá cesta rovnoměrně stoupá na každý metr o 10 cm. O kolik metrů stoupne cesta na vzdálenost 1250 m ?

    [ 125 m ]

39. Tovární komín vrhá na rovinu dvora stín dlouhý 40 m a v téže době vrhá svislá tyč délky 2 m stín dlouhý 3 m. Určete výšku továrního komína.

    [ 26,66 m ]




40. Abychom mohli určit vzdálenost dvou navzájem nepřístupných míst A a B, sestrojíme trojúhelník $AB_1C_1$, kde změříme vzdálenosti $AB_1$ a $AC_1$. Určete vzdálenost AB, je-li AC = 121 m, $AB_1 = 7$ m, $AC_1 = 11$ m.

    [ 77 m ]

41. Jeden ze dvou podobných trojúhelníků má obvod 100 cm, strany druhého jsou o 8, 14, a 18 cm větší než odpovídající strany prvního trojúhelníku. Určete délky stran obou trojúhelníků.

    [ první 20,35,45; druhý 28, 79, 63 ]

42. Trojúhelník má stranu délky a = 36 cm a příslušnou výšku $v_a = 15$ cm. Určete $a'$; $v'_a$ v podobném trojúhelníku s obsahem $S' = 120\ cm^2$.

    [ $a' = 24$, $v'_a = 10$ ]

43. Stín stromu má délku 9 m, stín nedaleké svislé metrové tyče je v tutéž dobu dlouhý 1,5 m. Určete výšku stromu.

    [ 6 m ]

44. Určete měřítko mapy, jestliže trojúhelníkové pole o rozměrech 162,5 m; 117,5 m; 180 m je na mapě zakresleno jako trojúhelník o stranách 6,5 mm, 4,7 mm, 7,2 mm.

    [ 1 : 25000 ]

45. Pomocí redukčního úhlu zkraťte úsečky délek 4 cm, 8 cm, 12 cm, v poměru 5 : 11.

46. Pomocí redukčního úhlu zvětšete úsečky délek 6 cm, 2 cm, 3 cm, v poměru 7 : 5.

47. V blízkosti uhelného dolu byla nasypána kuželovitá hromada 15 m vysoká o spádu 2 : 5. Jak velký je poloměr kruhu zasypané země? [ 37,5 m ]