Posloupnosti a řady

Definice : Posloupnost je funkce, která má definiční obor celá kladná čísla. Podle typu oboru hodnot mohou být posloupnosti přirozených, celých, racionálních nebo reálných čísel.

Příklady posloupností :

dáno vzorcem pro n-tý člen	dáno výčtem
$\left\{n\right\}_{n=1}^{\infty}$	$\left\{1,2,3,4,5,.....n\right\}$
$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$	$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}.....\frac{1}{n}\right\}$
$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$	$\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},.....\frac{n+1}{n}\right\}$
$\left\{2^{n}\right\}_{n'=1}^{\infty}$	$\left\{2,4,8,16,32,64,.....2^{n}\right\}$

Typy posloupností:

1. a) nekonečné - byly uvedeny v předchozím příkladě

b) konečné - např. $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{4}$ - končí členem $\frac{16}{5}$

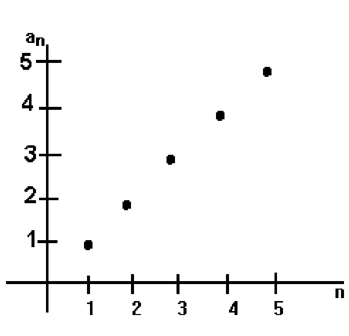
(za n dosazeno č. 4)

2. a) rostoucí např. : $\left\{n\right\}_{n=1}^{\infty}$

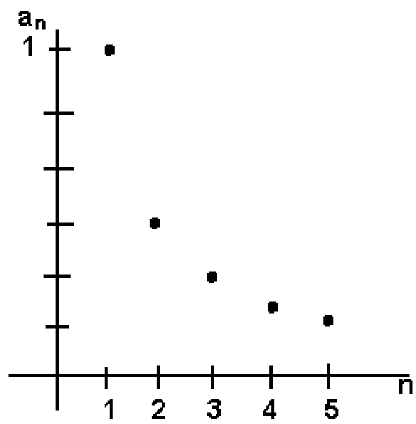
b) klesající např. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Jednotlivé členy posloupnosti můžeme zobrazovat jako body v rovině

$\left\{n\right\}_{n=1}^{\infty}$



$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$



Zde je vidět růst a klesání posloupností.

Definice rostoucí posloupnosti:
jsou-li m, n$\in$ N, $a_n < a_m \Leftrightarrow n < m$

Definice klesající posloupnosti:
jsou-li m, n$\in$ N, $a_n > a_m \Leftrightarrow n < m$

Příklady:

1) Posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí ...... např. $a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$(1<2) \wedge (1<2)$

2) Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$(1<2) \wedge \left(1 > \frac{1}{2}\right)$

Příklad: Rozhodněte, zda posloupnost an $= \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí nebo klesající

Řešení: Budeme předpokládat, že posloupnost je klesající. Pro její dva členy a_n a a_{n+1} by mělo platit $a_n > a_{n+1}$.

$a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n+2} \quad / \cdot (n+1)(n+2)$$

$$n(n+2) > (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n > n^2 + 2n + 1$$

$0 > 1$ tato nerovnost není splněna

Původní předpoklad byl nesprávný, posloupnost je rostoucí.

Cvičení

Rozhodněte , zda je rostoucí nebo klesající posloupnost:

1.) $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ K

2.) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ K

3.) $\left\{\frac{2n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ R

4.) $\left\{ \dfrac{1+(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ani R ani K

5.) $\left\{ -\dfrac{1}{2}n \right\}_{n=1}^{\infty}$ K

6.) $\left\{ 2n \right\}_{n=1}^{\infty}$ R

7.) $\left\{ \dfrac{n+1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ K

Určení posloupností

A) Výčtem

$\{1,2,3,4,5,..........\}$

B) Vzorcem pro n-tý člen

$\left\{ \dfrac{1}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

A) Rekurentně

Je dán jeden nebo více členů a vztah, kterým lze vypočítat další členy:
Příklad:

$a_1 = 1, a_2 = 2$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Odtud je možno vypočítat další členy:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

Příklad : Napište prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n - tý člen :

$\left\{ 3n \right\}_{n=1}^{\infty}$

Řešení : $a_1=1$; $a_2 = 6$; $a_3 = 9$; $a_4 = 12$; $a_5 = 15$

Cvičení :
Napište prvních pět členů posloupností :

1) $\left\{ \dfrac{n-1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left[0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5} \right]$

2) $\left\{ \sin \dfrac{\pi}{2} . n \right\}_{n=1}^{\infty}$ [1 ; 0 ; -1 ; 0 ; 1]

3)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti

$a_1 = 6$

$a_{n+1} = 3.a_n$ [2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162]

4)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti

$a_1 = 0$

$a_{n+1} = 1 - a_n$ [0,1,00,1,0]

5)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti

$a_1 = 0$ $\left[0,7,14,21,28\right]$

$a_{n+1} = a_n + 7$

6)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti

$a_2 = 5$ $\left[\frac{7}{3},5,13,37,109\right]$

$a_{n+1} = 3a_n - 2$

7)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti

$a_5 = 17$ $\left[-\frac{7}{4},-\frac{1}{2},2,7,17\right]$

$a_{n+1} = 2a_n + 3$

8)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti:

$a_1 = 1$ $\left[1,1,0,-1,-1\right]$

$a_2 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

9)Vypište prvních pět členů rekurentní posloupnosti:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$ b) $a_1 = 0, a_{n+1} = 7 + a_n$

c) $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - a_n$ d) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

Určete vzorec pro n-tý člen posloupnosti:

10)$1; \frac{5}{2}; \frac{25}{4}; \frac{125}{8}; \frac{625}{16}$............ $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

11)-3, 2, 7, 12, 17, ... $\left\{5n - 8\right\}_{n'=1}^{\infty}$

12)$\frac{1}{1.2}; \frac{2}{2.3}; \frac{3}{3.4}; \frac{4}{4.5}$;.............. $\left\{\frac{n}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$

13)$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$;............ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

14)1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 ; 216 .... $\left\{n^3\right\}_{n=1}^{\infty}$

15)1 ; -1; 1 ; -1 ; 1 .... $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

16)54 ; -18 ; 6 ; -2 ; $\frac{2}{3}$;$-\frac{2}{9}$........... $\left\{54\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$