PRAVDĚPODOBNOST A JEJÍ UŽITÍ

Základním pojmem teorie pravděpodobnosti je **náhodný jev**.

- **náhodný jev**: výsledek nějaké činnosti nebo pokusu , o němž má smysl prohlásit že nastal nebo ne.

Náhodné jevy se označují se velkými písmeny.

Pro pravděpodobnost P(A) náhodného jevu A platí : $P(A) = \frac{m}{n}$

n - počet možných výsledků činnosti

m - počet příznivých výsledků činnosti

Příklad:

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo?

Řešení:

n .....kostkou může padnout celkem 6 čísel n = 6

m .....číslo liché 1,3,5 m = 3

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Příklad:

V osudí je deset koulí – čtyři bílé a šest červených. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném vytažení 3 koulí budou všechny červené?

Řešení:

n …. $C_3(10) = \binom{10}{3}$

m …. $C_3(6) = \binom{6}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

Příklad:

V dodávce 150 osvětlovacích těles je 9 vadných.

a) Jaká je pravděpodobnost , že náhodně vybrané těleso je vadné?

b) Jaká je pravděpodobnost že ve vybrané skupině 5 těles se nenalézá žádné vadné?

Řešení:

a) n = 150 $P(A) = \frac{9}{150} = \frac{3}{50} = 0{,}06$

m = 9

b) $n = C_5(150)$ $$P(A) = \frac{\binom{141}{5}}{\binom{150}{5}} = \frac{\frac{141!}{5!136!}}{\frac{150!}{5!145!}} = \frac{145!141!}{136!150!} = \frac{141\cdot 140\cdot 139\cdot 138\cdot 137}{150\cdot 149\cdot 148\cdot 147\cdot 146} = 0{,}73072$$

$m = C_5(141)$

Pravděpodobnost má tyto vlastnosti:

1) pro nemožný jev platí:

$m = 0$ $P(A) = 0$

2) pro jistý jev platí:

$m = n$ $P(A) = \frac{n}{n} = 1$

3) Pro každý náhodný jev platí : $0 < P(A) < 1$

Úlohy:

1) Z karetní hry o 32 kartách vybereme náhodně 3 karty . Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude 1 král? [0,34]
2) V osudí je 8 koulí bílých a 6 červených. Vybereme náhodně 4 koule. Jaká je pravděpodobnost, že nemají všechny stejnou barvu?
3) V zásilce 20 rozhlasových přijímačů je 10% vadných. Vypočtěte pravděpodobnost, že při prodeji 3 přijímačů jsou dva bez závad?

Doplňkový jev :

Jev $\overline{A}$ je doplňkovým jevem jevu A, jestliže nastane právě tehdy, když nenastane jev A.

Platí : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Příklad:

V osudí je deset koulí – čtyři bílé a šest červených. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném vytažení 4 koulí **alespoň** jedna bílá?

Řešení:

Řešíme pomocí doplňkového jevu $\overline{A}$: při náhodném vytažení 4 koulí není žádná bílá

n …. $C_4(10) = \binom{10}{4}$

m …. $C_4(6) = \binom{6}{4}$

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{6!}{4!\cdot 2}}{\frac{10!}{4!\cdot 6!}} = \frac{6!\cdot 6!}{2\cdot 10!} = \frac{6!\cdot 6!}{2\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!} = 0{,}0375$$

$P(A) = 1 - 0{,}0375 = 0{,}9625$

Bernoulliovo schéma

Máme n nezávislých pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p nebo nezdarem s pravděpodobností q. Pak pravděpodobnost jevu A_k, že právě k pokusů skončí zdarem bude:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Příklad:

V osudí je 20 bílých a 10 černých koulí. Táhneme 6 krát po jedné kouli a kouli znovu do osudí vrátíme. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme právě 5 krát bílou kouli?

Řešení:

Máme 6 pokusů … n = 6.

Chceme vytáhnout 5 bílých koulí …. k = 5

Za zdar považujeme vytažení bílé koule $P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ - pravděpodobnost vytažení bílé koule …. $p = \frac{2}{3}$

Za nezdar považujeme vytažení černé koule $P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ - pravděpodobnost vytažení černé koule …… $q = \frac{1}{3}$

$$P(A_5) = \binom{6}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{32}{243} \cdot \frac{1}{3} = \frac{64}{243} = 0{,}263$$

Příklad:

Jaká je pravděpodobnost, že rodina se 4 dětmi má tři chlapce?

Řešení:

n = 4 k = 3

Za zdar považujeme narození chlapce, jeho pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$ …… $p = \frac{1}{2}$

Za nezdar považujeme narození dívky, jeho pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$ …… $q = \frac{1}{2}$

$$P(A_3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Příklad:

Jaká je pravděpodobnost, že rodina se 4 dětmi má **alespoň** 1 chlapce?

Řešení:

Využijeme k řešení doplňkový jev: rodina nemá ani jednoho chlapce.

Za zdar považujeme narození chlapce, jeho pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$ …… $p = \frac{1}{2}$

Za nezdar považujeme narození dívky, jeho pravděpodobnost je $\frac{1}{2}$ …… $q = \frac{1}{2}$

n = 4 k = 0 $P(A_0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

Pravděpodobnost narození alespoň 1 chlapce je $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Příklad:

Studentovi je předložen test, který má 10 otázek a u každé 4 možné odpovědi, z nichž jen 1 je správná.. Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně **alespoň** na 5 otázek, volí-li odpovědi náhodně?

Řešení:

n = 10

pravděpodobnost správné odpovědi na 1 otázku je $p = \frac{1}{4}$

pravděpodobnost nesprávné odpovědi na 1 otázku je $q = \frac{3}{4}$.

Má správně odpovědět alespoň na 5 otázek (tj. na 5 nebo 6 nebo 7 nebo 8 nebo 9 nebo 10).. k = 5, 6, 7, 8, 9, 10

$$P(A_5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 = ...$$

$$P(A_{5-10}) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 +$$

$$+ \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0{,}078$$

Pravděpodobnost sjednocení jevů:

Pravděpodobnost sjednocení dvou vzájemně neslučitelných jevů je rovna součtu pravděpodobností jednotlivých jevů. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Pravděpodobnost dvou slučitelných jevů A a B vypočteme ze vztahu:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Příklad: (neslučitelných jevů – jsou to jevy, které nemohou nastat zároveň:)

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne číslo 2 nebo 3?

Řešení:

Jevy jsou neslučitelné, nemůžeme hodit zároveň 2 a 3.

jev A - padne 2 , jev B - padne 3

$P(A) = \frac{1}{6}$ $P(B) = \frac{1}{6}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Příklad: (slučitelných jevů – jsou to jevy, které mohou nastat zároveň:)

Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojciferné číslo je dělitelné 10 nebo 15.

Řešení:

Jev A - číslo je dělitelné 10 : $n = V'_2(10) - 10 = 100 - 10 = 90$

$m = 9$ (jsou to čísla 10, 20, 30, 40,…..)

$$P(A) = \frac{9}{90} = 0{,}1$$

Jev B - číslo je dělitelné 15 : n = 90

m = 6 (15, 30, 45, 60, 75, 90)

$$P(B) = \frac{6}{90} = 0.0666666667$$

Zde se jedná o navzájem slučitelné jevy, protože existuje číslo dělitelné 10 a zároveň 15

Použijeme vzorec $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Čísla dělitelná 10 a zároveň 15: 30,60,90

$$P(A \cap B) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9 + 6 - 3}{90} = \frac{12}{90} = 0{,}1333333333$$

Pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů

Příklad:

Určete pravděpodobnost, že při 2 hodech kostkou padne v prvním hodu 6 a v druhém nepadne.

Řešení:

jev A – padne šestka v 1. hodu

jev B – nepadne šestka v 2. hodu

Tyto jevy jsou nezávislé – výsledek jednoho neovlivňuje druhý.

$P(A) = \frac{1}{6}$ $P(B) = \frac{5}{6}$

Platí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

Cvičení:

4) V obchodě mají 12 kusů nějakého zboží, z nichž 3 kusy jsou vadné. Zákazník si vybere a koupí 3 kusy.Jaká je pravděpodobnost, že si vybral právě ty 3 vadné?

[0,004545]

5) Ve třídě je 20 chlapců a 12 dívek. Losem jsou určeni 2 mluvčí třídy. Jaká je pravděpodobnost, že obě pohlaví budou mít své zastoupení?

[$\frac{15}{31}$]

6) Vsadíme jednu sázenku Sportky. Jaká je pravděpodobnost, že neuhádneme ani jedno číslo?

[0,463]

7) Ve třídě je 18 dívek a 13 chlapců. Pro dozor o přestávkách se losem určí 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že to budou 2 dívky a 2 chlapci?

[0,379]

8) Ve třídě je 30 žáků, z nichž 5 nemá vypracované domácí cvičení. V hodině budou vyvoláni 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň 1 žák bez dom. cvičení?

[0,538]

9) Ve třídě je 32 žáků, z nichž 10 není připraveno. V hodině budou 3 žáci zkoušeni. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 2 z nich jsou připraveni?

[0,776]

10) V tombole je 1000 losů. Jakou pravděpodobnost hlavní výhry má účastník, který koupil 5 losů?

[0,005]

11) Ve třídě je 35 žáků: 20děvčat a 15 chlapců. Vybereme namátkou pětici žáků. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme jen děvčata?

[0,0478]

12) Ve třídě je 35 žáků: 20děvčat a 15 chlapců. Vybereme namátkou pětici žáků. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme 3 děvčata a 2 chlapce.

[0,369]

13) Ve třídě je 31 žáků. Mají být zkoušeni 3 žáci. Na zkoušku je připraveno 25 žáků. Jaká je pravděpodobnost, že budou všichni 3 nepřipraveni?

[0,00445]

14) V osudí je 5 kuliček černých a 15 bílých. Jaká je pravděpodobnost, že pří náhodném výběru 4 kuliček budou všechny černé?

[0,00103]

15) V osudí je 5 kuliček černých a 15 bílých. Jaká je pravděpodobnost, že pří náhodném výběru 4 kuliček budou 3 bílé a 1 černá?

[0,4696]

16) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojciferné přirozené číslo je dělitelné čtyřmi nebo 6.

[$\frac{29}{90}$]

17) Určete pravděpodobnost, že při dvou hodech kostkou padne v prvním hodu sudé číslo a v druhém liché.

[0,25]

18) Určete pravděpodobnost, že při 10 hodech mincí padne desetkrát líc.

[$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$]