Nekonečná geometrická řada

Výraz tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ ....} + a_n + \text{ ....}$$

kde a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ,.......a_n ,....... jsou členy posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá nekonečná řada.

Zkráceně můžeme napsat řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Tvoří-li navíc členy a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ,.......a_n ,....... geometrickou posloupnost, nazýváme řadu nekonečná geometrická řada.

Součet geometrické řady:

- vypočteme podle vzorce : $s = \dfrac{a_1}{1 - q}$

Aby existoval součet geometrické řady, musí být $|q| < 1$.

<u>Příklad:</u>

Určete součet řady $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

<u>Řešení:</u>

Jedná se o geometrickou řadu , kde $a_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$. Protože je splněna podmínka $|q| < 1$, můžeme pro součet geometrické řady použít vzorec $s = \dfrac{a_1}{1 - q}$.

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Součet geometrické řady je 2.

<u>Příklad:</u>

Určete součet řady $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

<u>Řešení:</u>

Tato řada na první pohled nevypadá jako geometrická. Při bližším zkoumání zjistíme , že jsou zde dvě geometrické řady „promíchány“ do sebe. Můžeme ji rozložit na dvě geometrické řady:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$$

Určíme zvlášť součet každé řady:

$$s_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \qquad s_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \qquad s = s_1 + s_2 = \mathbf{1{,}5}$$

<u>Příklad:</u>

Napište periodické číslo $1{,}2\overline{3}$ ve tvaru zlomku .

<u>Řešení:</u>

Toto číslo má tvar 1,2333333333..........

Můžeme jej rozepsat jako součet zlomků $\dfrac{12}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1000} + \dfrac{3}{10000} + \dfrac{3}{100000} + \ldots\ldots\ldots$

Bez prvního zlomku se jedná o součet geometrické řady , kde $a_1 = \dfrac{3}{100}; q = \dfrac{1}{10}$.

První zlomek ponecháme stranou, sečteme geometrickou řadu . Výsledek sečteme s prvním zlomkem.

$$s = \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{3} = \frac{1}{30}$$

Výsledný zlomek bude mít tvar $\dfrac{12}{10} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{36 + 1}{30} = \dfrac{37}{30}$

Kontrolu můžeme provést na kalkulačce vydělením čísel 37:30 = 1,233333.

Příklad:

Napište periodické číslo $2{,}1\overline{7}\overline{3}$ ve tvaru zlomku .

Řešení:

Toto číslo má tvar 2,17373737373...................

Můžeme jej rozepsat jako součet zlomků $\frac{21}{10}+\frac{73}{1000}+\frac{73}{100000}+\frac{73}{10000000}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

Bez prvního zlomku se jedná o součet geometrické řady , kde $a_1 = \frac{73}{1000}; q = \frac{1}{100}$.

První zlomek ponecháme stranou, sečteme geometrickou řadu . Výsledek sečteme s prvním zlomkem.

$s = \frac{\frac{73}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{73}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{\frac{73}{10}}{99} = \frac{73}{990}$ Výsledný zlomek má tvar $\frac{21}{10}+\frac{73}{990} = \frac{2079+73}{990} = \frac{2152}{990} = \frac{1076}{495}$

Příklad:

Řešte rovnici $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \ldots\ldots\ldots = 1$

Řešení:

Nejprve sečteme řadu na levé straně rovnice. Levou stranu ještě upravíme na tvar:

$$2^x + \left(2^x\right)^2 + \left(2^x\right)^3 + \left(2^x\right)^4 + \ldots\ldots$$

Jedná se o geometrickou řadu , kde $a_1 = 2^x$; $q = 2^x$. Aby měla řada součet musí být $2^x < 1$, tedy $2^x < 2^0$, odtud $x < 0$.

Součet řady určíme podle vzorce: $s = \frac{2^x}{1-2^x}$

Dále řešíme rovnici

$$\frac{2^x}{1-2^x} = 1/(1-2^x)$$

$$2^x = 1-2^x$$

$$2.2^x = 1$$

$$2^x = \frac{1}{2}; x = -1$$

Vypočtený kořen ***x = -1*** vyhovuje podmínce.

Příklad:

Určete, pro která x lze určit součet řady a určete ho: $1 + (1+x)^2 + (1+x)^3 + (1+x)^4 + \ldots\ldots$

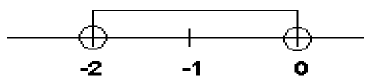
Řešení:

Jedná se o geometrickou řadu $a_1 = 1$, $q = (1+x)$

musí být $|1 + x| < 1$

Nerovnice se řeší metodou nulového bodu:

x splňuje podmínku: $-2 < x < 0$



$$s = \frac{1}{1-1-x} = -\frac{1}{x}$$

Příklad:

Určete hodnotu součinu $y = 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\ldots\ldots$

Řešení:

Protože se jedná o součin a ne součet, musíme nejprve celou rovnost logaritmovat - získáme součet logaritmů:

$$\log y = \log 3 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{8}\log 3 + \frac{1}{16}\log 3 + \ldots\ldots\ldots$$

na pravé straně je nekonečná geometrická řada : $a_1 = \log 3$, $q = \frac{1}{2}$

$$s = \frac{\log 3}{1-\frac{1}{2}} = 2\log 3 = \log 3^2$$

Po dosazení do rovnosti : $\log y = \log 9$

$\underline{y = 9}$

Cvičení:

1) Sečtěte tyto řady:

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots.$ b) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\ldots$

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-.....$ d) $5+\frac{7}{2}+\frac{49}{20}+.....$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ g) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}+.....$

[a) 1,5 ; b) 3 ; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{50}{3}$; e) 0,5 ; f) 0,25 ; g) 2-$\sqrt{2}$]

2) Převeďte na zlomky:

a) $8,\overline{4}$ b) $0,4\overline{7}$ c) $3,\overline{012}$ d) $2,\overline{486}$

[$a)\frac{76}{9};b)\frac{43}{90};c)\frac{1003}{333};d)\frac{92}{37}$]

3) Řešte rovnice: a)

$\frac{\sqrt{2}}{2}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ b) $-\frac{2}{5}=x-2x^2+x^3-2x^4+....$

[$a)\sqrt{2}-1;b)-\frac{1}{4};\frac{2}{3}$]

4) Určete součet řady: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+.......$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

5) Určete součet řady: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}.......$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

6) Určete součet řady: $2+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{27}-\frac{1}{4}+.......$ $\left[\frac{11}{6}\right]$

7) Převeďte na zlomek: $1,0\overline{23}$ $\left[\frac{1013}{990}\right]$

8) Určete součet řady: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+.......$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

9) Určete součet řady: $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\frac{81}{256}-\frac{243}{1024}.......$ $\left[\frac{4}{7}\right]$

10) Určete součet řady: $\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^3+\left(\sqrt{5}-2\right)^4+....$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$

11) Určete, pro která x existuje součet řady a určete ho: $1+(2-x)+(2-x)^2+(2-x)^3+\ldots$

$\left[\frac{1}{x-1};1\prec x\prec 3\right]$

12) Určete hodnotu výrazu: $\frac{1+2+3+4+5+.....+n}{n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+....}$ $\left[\frac{1+n}{4}\right]$

13) Řešte rovnici: $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+........=2$ $[x=10]$

14) Řešte rovnici: $1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+...........=\frac{4x-3}{3x-4}$ $[\cancel{x_1=6};x_2=1]$

15) Řešte rovnici: $2^x+4^x+8^x+16^x+.........=1$ $[x=-1]$

16) Řešte rovnici: $1+\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+.......=2tgx$ $[45°,225°]$

17) Určete součet řady: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4+....$ $\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4}\right]$

18) Řešte rovnici: $1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}+...........=\frac{6}{x+5}$ $[x_1=4;x_2=-3]$

19) Řešte rovnici: $2^x\cdot\sqrt{2^x}\cdot\sqrt[4]{2^x}\cdot\sqrt[8]{2^x}\cdot\sqrt[16]{2^x}.......=0,25$