

Sinová věta

- platí v obecném trojúhelníku (nemusí být pravouhlý)

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Poměr délek stran je roven poměru sinů protilehlých vnitřních úhlů.

Nejpoužívanější tvar:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Použití:

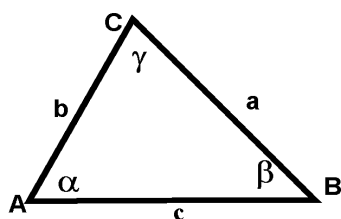
K výpočtu ostatních prvků v trojúhelníku, je-li dáno:

- dvě strany a úhel proti větší z nich
- dva úhly a strana

Příklad:

Je dán trojúhelník ABC, $a = 395$, $b = 287$, $\alpha = 42^{\circ}20'$. Určete c , β , γ .

Řešení:



1) Výpočet β :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{287 \cdot \sin 42^{\circ}20'}{395}$$

$$\underline{\underline{\beta = 29^{\circ}10'}}$$

2) Výpočet γ : $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta$

$$\underline{\underline{\gamma = 108^{\circ}22'}}$$

3) Výpočet c :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{395 \cdot \sin 108^{\circ}22'}{\sin 42^{\circ}20'}$$

$$\underline{\underline{c = 556,7}}$$

Cvičení:

1. Je dán trojúhelník ABC : $a = 25,6$, $\beta = 35^{\circ}40'$, $\gamma = 67^{\circ}30'$. Určete α , b , c .

$$[\alpha = 75^{\circ}50'; b = 15,8; c = 24,4]$$

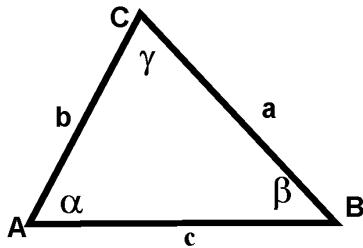
2. Je dán trojúhelník ABC : $a = 57,6$, $c = 48,8$, $\alpha = 123^{\circ}20'$. Určete β , γ , b .

$$[\beta = 11^{\circ}36'; \gamma = 45^{\circ}04'; b = 13,9]$$

3. Je dán trojúhelník ABC : $b = 34,5$; $a = 28,9$; $\gamma = 38^\circ 20'$. Určete β ; a ; c .
 [$\beta = 85^\circ 10'$; $a = 28,9$; $b = 21,5$]

Kosinová věta

Platí v obecném trojúhelníku.



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

Je - li velikost úhlu $\gamma = 90^\circ$, potom platí:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 90^\circ \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Pythagorova věta je tedy zvláštním případem kosinové věty.

Použití:

k výpočtu ostatních prvků v trojúhelníku , je-li dáno:

- dvě strany a úhel jimi sevřený
- tři strany

Příklad:

Je dán trojúhelník ABC : $a = 35$, $b = 29$, $\gamma = 60^\circ$. Určete c , α , β .

Řešení:

1) Výpočet c : $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$
 $c = \underline{\underline{32,4}}$

2) Výpočet β :

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \beta} &= \frac{c}{\sin \gamma} \\ \sin \beta &= \frac{b \cdot \sin \gamma}{c} \\ \beta &= \underline{\underline{50^\circ 49'}} \end{aligned}$$

3) Výpočet α :

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - \beta - \gamma \\ \alpha &= \underline{\underline{69^\circ 11'}} \end{aligned}$$

Při výpočtech počítáme největší úhel jako poslední!!!

Příklad:

Je dán trojúhelník ABC : $a = 19$, $c = 6$, $\beta = 44^\circ 08'$. Určete b , α , γ .

Řešení:

1) Výpočet b : $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$
 $b = \underline{\underline{15,09}}$

Při nedodržení správného pořadí by vyšlo:

2) Výpočet α :

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \beta} &= \frac{a}{\sin \alpha} \\ \sin \alpha &= \frac{a \cdot \sin \beta}{b} & \alpha &= 61^\circ 15' \end{aligned}$$

3) Výpočet γ : $\gamma = 180 - \alpha - \beta$
 $\beta = 74^\circ 37'$

Toto řešení není správné , protože je porušeno pravidlo, kdy proti největší straně musí ležet největší úhel.

Správný je tento postup:

2) Úhel γ :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$
$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \beta}{b} \quad \gamma = \underline{16^{\circ}03'}$$

3) Úhel α : $\alpha = 180^{\circ} - \beta - \gamma$
 $\alpha = \underline{119^{\circ}49'}$

Cvičení:

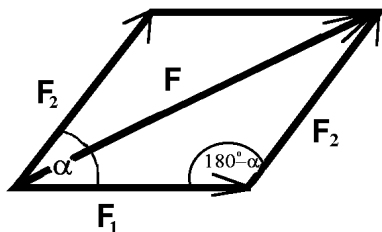
- 1) Je dán trojúhelník ABC : a = 7 ; b = 6 , c = 5 . Určete α , γ , β .
[$\alpha = 78^{\circ}28'$; $\beta = 57^{\circ}07'$; $\gamma = 44^{\circ}25'$]
- 2) Je dán trojúhelník ABC : a = 20 ; b = 21 , c = 29 . Určete α , γ , β .
[$\alpha = 43^{\circ}36'$; $\beta = 46^{\circ}24'$; $\gamma = 90^{\circ}$]
- 3) Je dán trojúhelník ABC : a = 75 ; b = 64 , $\gamma = 42^{\circ}30'$. Určete c , α , β .
[$\alpha = 77^{\circ}30'$; $\beta = 60^{\circ}$, c = 51,9]
- 4) Je dán trojúhelník ABC : $\alpha = 0,845$ rad ; $\beta = 0,682$ rad , c = 5,24 . Určete a , b , γ .
[$\gamma = 10615$ rad ; a = 3,95 , b = 3,3]
- 5) Je dán trojúhelník ABC : c = 10,82 ; b = 8,54 ; $\gamma = 72^{\circ}10'$. Určete a , α , β .
[$\alpha = 59^{\circ}10'$, $\beta = 48^{\circ}40'$, a = 9,76]
- 6) Určete obsah trojúhelníku ABC , je-li dáno: a = 25,10 ; $\alpha = 63^{\circ}$; $\beta = 38^{\circ}$.
(Použijte vzorec $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$) [213,6]
- 7) Určete α , β , γ , je-li a : c = 3 : 5 ; $\gamma = 2 \alpha$.
[$\alpha = 33^{\circ}33'$; $\beta = 79^{\circ}21'$; $\gamma = 67^{\circ}06'$]
- 8) Je dán trojúhelník ABC : a = 16,9 ; b = 21,8 ; c = 19,4 . Určete α , β , γ .
[$\alpha = 48^{\circ}$, $\beta = 73^{\circ}27'$, $\gamma = 58^{\circ}33'$]
- 9) Je dán trojúhelník ABC : a = 51,34 ; b = 34,75 ; $\gamma = 64^{\circ}30'$. Určete c , α , β .
[$\alpha = 74^{\circ}44'$, $\beta = 40^{\circ}46'$, c = 48,03]
- 10) Určete velikost největšího vnitřního úhlu v trojúhelníku ABC , je-li a = 74 ; b = 53 ; c = 45 .
[$\alpha = 97^{\circ}44'$]
- 11) V trojúhelníku ABC je dáno : b = 7 cm , $v_b = 3,6$ cm , $\alpha = 53^{\circ}$. Určete a , c , β , γ .
[]
- 12) V trojúhelníku ABC je dáno : a = 4 cm , $v_a = 2,3$ cm , $\beta = 52^{\circ}$. Určete b , c , α , γ .
[]

Praktické úlohy:

Příklad:

Dvě síly $F_1 = 35$ N a $F_2 = 51$ N spolu svírají úhel $\alpha = 56^{\circ}$. Určete velikost výslednice F a její úhly s jednotlivými složkami.

Řešení:



Velikost síly F určíme kosinovou větou :

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^{\circ} - \alpha)$$

$$F^2 = 35^2 + 51^2 - 2 \cdot 35 \cdot 51 \cdot \cos 124^{\circ}$$

$$\mathbf{F = 76,3 \text{ N}}$$

Úhly síly F s jednotlivými složkami určíme sinovou větou:

$$\frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{F}{\sin(180^{\circ} - \alpha)}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{F_2 \cdot \sin(180^{\circ} - \alpha)}{F}$$

$$\alpha_1 = \underline{33^{\circ}39'} \quad \alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = \underline{22^{\circ}21'}$$

Cvičení:

1) Dvě síly $F_1 = 58 \text{ N}$ a $F_2 = ?$ spolu svírají úhel $\alpha = 59^\circ$. Výslednice $F = 105 \text{ N}$. Určete F_2 .

[63 N]

2) Dvě síly $F_1 = 300 \text{ N}$ a $F_2 = 400 \text{ N}$ spolu svírají úhel $\alpha = 40^\circ$. Určete F , α_1 , α_2 .

[659 N ; 23° ; 17°]

3) Dvě síly $F_1 = 130 \text{ N}$ a $F_2 = 70 \text{ N}$ spolu svírají úhel $\alpha = 50^\circ$. Určete F .

[183 N]

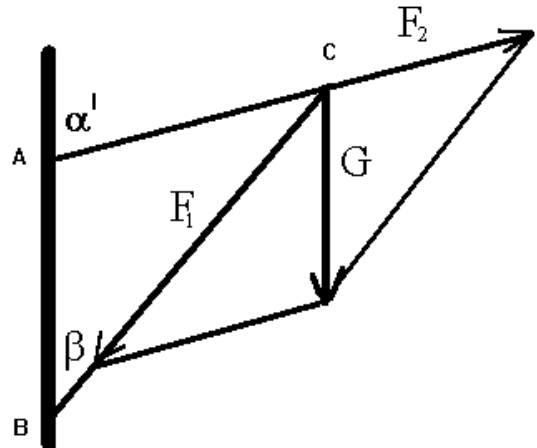
4) Jaký úhel svírají síly $F_1 = 80 \text{ N}$ a $F_2 = 95 \text{ N}$, je-li jejich výslednice $F = 152 \text{ N}$?

[$59^\circ 39'$]

5) Jaký úhel svírají síly $F_1 = 80 \text{ N}$ a $F_2 = 95 \text{ N}$, je-li jejich výslednice $F = 88,5 \text{ N}$?

[$119^\circ 56'$]

6) Nosník ABC je umístěn na svislé stěně, velikost úhlů: $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 35^\circ$. V bodě C je zatížen břemenem o tíze $G = 15000 \text{ N}$. Vypočítejte velikost tahu na rameno AC a tlaku na rameno BC.



7) Dvě síly $F_1 = 58 \text{ N}$ a $F_2 = ?$ spolu svírají úhel $\alpha = 59^\circ$.

Výslednice $F = 105 \text{ N}$. Určete F_2 , α_1 , α_2 .

[63 N, $30^\circ 45'$, $28^\circ 15'$]

8) Síla $F_1 = 210 \text{ N}$ svírá s výslednicí sil F úhel $\alpha_1 = 33^\circ$.

Velikost síly $F = 350 \text{ N}$. Určete F_2 a α_2 .

[$33^\circ 22'$, 208 N]

9) Tlaková síla $F = 120 \text{ N}$ se má rozdělit na 2 složky F_1 , F_2 . Tyto složky svírají se silou F úhly $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$. Jaké jsou složky F_1 , F_2 ?

[87,85 N, 62,12 N]

10) 15 m vysoká budova je vzdálena 30 m od břehu řeky. Z vodorovné střechy této budovy je vidět šířku řeky pod úhlem 15° . Jak široká je řeka?

[43,3 m]

11) Dvě přímé dlužní štoly vycházející z téhož místa C svírají úhel 100° . Délka štoly DC je 80 m. Délka štoly CE je 158 m. Jak dlouhou spojovací štolu DE bude nutno prorazit?

[189 m]

12) Z pozorovatelů PQ vzdálených od sebe 2,8 km bylo pozorováno letadlo L a byly změřeny velikosti úhlů $\angle LPQ = 76^\circ 30'$ a $\angle PQL = 62^\circ 10'$. Jak vysoko bylo letadlo nad základnou PQ v daném okamžiku?

[3,64 km]

13) Máme vypočítat délku tunelu AB, jestliže bylo naměřeno: $BC = 619,8 \text{ m}$ a $AC = 437,8 \text{ m}$, $\angle BCA = 97^\circ 45' 36''$.

[805,7 m]

14) Dvěma lany je ke stropu připevněno břemeno o tíze $G = 200 \text{ N}$. Lana jsou stejně dlouhá a svírají s rovinou stropu úhel $\alpha = 45^\circ$. Jakými silami jsou obě lana namáhána?

[141,4 N]

15.) Na břehu řeky stojí budova, z jejichž oken ve vzdálenosti 12 m je vidět bod na druhém břehu (v rovině kolmé ke směru řeky) v hloubkových úhlech o velikosti $\alpha = 37^\circ 57'$ a $\beta = 25^\circ 26'$. Vypočítejte šířku řeky.

[39,43 m]

16.) Sílu o velikosti $F = 2217,6 \text{ N}$ je třeba rozložit dvě složky, které s ní svírají úhly o velikostech $\alpha = 46^\circ 32'$ a $\beta = 54^\circ 12'$. Vypočítejte velikosti složek F_1 a F_2 .

[$F_1 = 1830,6 \text{ N}$, $F_2 = 1638,1 \text{ N}$]

17.) Síly o velikostech $F_1 = 42 \text{ N}$, $F_2 = 35 \text{ N}$ působí ve společném bodě a svírají úhel o velikosti $77^\circ 12'$. Jak velká je výsledná síla F ?

$$[F = 62,35 \text{ N}]$$

18.) Sílu o velikosti $F = 300 \text{ N}$ rozložte na složky F_1 a F_2 . První složka svírá se silou F úhel o velikosti $47^\circ 14'$ a druhá úhel o velikosti $18^\circ 53'$. Určete velikosti sil F_1 a F_2 .

$$[F_1 = 106,2 \text{ N}, F_2 = 240,9 \text{ N}]$$

19.) Tři síly, jejichž velikosti jsou v poměru 9: 10: 17, působí v rovině v jednom bodě tak, že jsou v rovnováze. Určete velikosti úhlů, které svírají každé dvě síly.

$$[53^\circ 08', 154^\circ 57', 151^\circ 55']$$

20.) Těleso o hmotnosti $m = 2000 \text{ kg}$ je zavěšeno dvěma lany různé délky na vodorovné traverze. Lana svírají s traverzou úhly o velikostech $38^\circ 26'$ a $49^\circ 54'$. Určete namáhání lan v tahu.

$$[1567,3 \text{ N}; 1288,8 \text{ N}]$$

21.) Po rampě se sklonem $18^\circ 40'$ je třeba vytlačit těleso tíhy 280 N . Jak velké síly je k tomu třeba a jak velká je tlaková síla působící na rampu, když tření zanedbáváme?

$$[89,62 \text{ N}; 265,27 \text{ N}]$$

22.) Konzola svařená ze dvou nosníků je upevněna na svislé zdi a nese těleso o tíze 1000 N . Jaké síly působí v jejich ramenech, jestliže jedno rameno svírá úhel o velikosti 35° a druhé rameno svírá úhel o velikosti 65° s rovinou zdi.

$$[1812,6 \text{ N}, 1147,1 \text{ N}]$$