Soustavy lineárních rovnic

Podmínky řešitelnosti soustavy:
1.) Stejný počet rovnic jako neznámých
2.) Rovnice jsou na sobě nezávislé

Příklad závislých rovnic: $2x + 3y = 5$
$4x + 6y = 10$

Druhá rovnice je dvojnásobkem první, soustava má nekonečně mnoho řešení .

3.) Rovnice si neodporují

Příklad odporujících si rovnic: $2x + 3y = 5$
$2x + 3y = 7$

Tato soustava nemá řešení.

A) Soustava dvou rovnic o dvou neznámých

1. METODA - metoda dosazovací

Z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme je do druhé rovnice. Tím dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé a najdeme jeden kořen. Druhý kořen určíme potom z kterékoli rovnice.

Příklad: $3x + 2y = 12$
$7x + 5y = 29$

Řešení: Z první rovnice vyjádříme **y** : $y = \dfrac{12-3x}{2}$ *)

Dosadíme za **y** do druhé rovnice: $7x + 5\,\dfrac{12-3x}{2} = 29$ /.2

$$14x + 60 - 15x = 58$$
$$-x = -2$$
$$x = 2$$

Dosazením do rovnice *) získáme **y** : $y = \dfrac{12-6}{2} = 3$

Řešení soustavy : $x = 2$; $y = 3$

Součástí úlohy je i zkouška. Dosadíme kořeny do levých i pravých stran obou rovnic:

$L_1 = 6 + 6 = 12$ $P_1 = 12$
$L_2 = 15 + 14 = 29$ $P_2 = 29$

2. METODA - metoda sčítací

Obě rovnice upravíme tak, abychom u jedné neznámé v obou rovnicích měli totéž číslo s různým znaménkem. Sečtením obou rovnic tato neznámá vypadne a zůstane pouze 1 rovnice s 1 neznámou. Druhý kořen vypočítáme opět z libovolné rovnice dosazením prvního kořene.

Příklad: $3x + 2y = 12$
$7x + 5y = 29$

<u>Řešení</u>: Abychom vyloučili z obou rovnic x, vynásobíme první rovnici č. (-7) a druhou rovnici č. 3. Dostaneme:

$$-21x - 14y = -84$$
$$21x + 15y = 87 \qquad \text{Obě rovnice sečteme}$$
$$\overline{\qquad\qquad y = 3}$$

Druhý kořen x vypočteme z první rovnice dosazením za y = 3 :

$$3x + 6 = 12$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Řešení: $x = 2$, $y = 3$

Zkouška je stejná jako v předchozím příkladě.

Cvičení:

1.) $x + 15y = 53$
$y - 3x = 27$ [8,3]

2.) $3x - 5y = 14$
$6x - 10y = 17$ [$\emptyset$]

3.) $y + 4z = 37$
$2y + 5z = 53$ [9,7]

4.) $9u - 4v = 4$
$3u = 4v$ $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$

5.) $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$
$3(x - 2) + 5(y - 1) = 19$ [5,3]

6.)
$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}(y + 1) = 1$
$\frac{1}{3}(x + 1) + \frac{3}{4}(y - 1) = 9$ [8,9]

7.) $(x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4)$
$(x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1)$ [7,5]

8.) $2(x - 1) + 3(y - 4) = 14$
$5(6 - x) - 4(y - 5) = 1$ [5,6]

9.) $4(u + 2) - 5(v + 3) = -1$
$7(2 - u) - 3(v + 5) = 12$ [-1;-2]

10.) $3(r - 4) - 3(s + 2) = 2$
$4(2 - r) + 2(2s - 7) = 14$ [$\emptyset$]

11.) $2[x - 2(x + 1)] - 3(2y - 5) = -11$
$4(2x + 3) - 3[1 + 2(2y - 3)] = 7$
[2;3]

12.) $4(a - 3) + 5[3b - 2(2b - 3)] = -11$
$2[4 - (a + 1)] + 6(4 - b) = 2$
[-1;5]

13.) $\frac{r}{2} - \frac{s}{6} = 3$

$2(r - s) = 4$

[8;6]

14.) $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = -4$

$4(x - 1) = 5(6 - y)$ [-4;10]

15.) $3[x + 2(2 - y)] = 9$

$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = -2$ [-5;-2]

16.) $\frac{x + y}{5} = -1$

x – y = -1 [-3;-2]

17.) $\frac{2r - 3}{3} = \frac{3s + 3}{6}$

$\frac{2}{3} = \frac{s - r}{9}$ [3;3]

18.) $\frac{2t + 7}{9} - \frac{u + 6}{3} = 0$

$\frac{t + 5}{3} - 2(t - u - 2) = \frac{t}{2}$ [-2;-5]

B.) Soustava 3 rovnic o 3 neznámých

Při řešení této soustavy můžeme kombinovat obě předchozí metody:

a) nejprve vyjádříme z jedné rovnice jednu neznámou a dosadíme ji do zbylých dvou rovnic (tam kde je to nejjednodušší)

b) zůstala nám soustava dvou rovnic o 2 neznámých, tu dořešíme buď metodou sčítací nebo dosazovací.

Příklad: Řešte soustavu rovnic I. 3x - y + 5z = 1
II. -x + 5y + 3z = 2
III. 5x + 3y - z = 3

Řešení: Z druhé rovnice vyjádříme **x**: x = 5y + 3z -2 *)
dosadíme do: I. 3(5y + 3z - 2) - y + 5z = 1
III. 5(5y + 3z - 2) + 3y -z = 3

15y + 9z - 6 - y + 5z = 1
25y + 15z - 10 + 3y - z = 3

14y + 14z = -7 / (-1) **)
28y + 14z = 13

-14y - 14z = -7
28y + 14z = 13

Obě rovnice sečteme 14y = 6

$y = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

z rovnice **) vypočteme **z**: $14.\frac{3}{7} + 14z = 7 - 14.\frac{3}{7} + 14z = 7$ 14z = 1 $z = \frac{1}{14}$

z rovnice *) vypočteme **x**: $x = \frac{15}{7} + \frac{3}{14} - 2 = \frac{30 + 3 - 28}{14} = \frac{5}{14}$

Výsledek: $x = \frac{5}{14}$ $y = \frac{3}{7}$ $z = \frac{1}{14}$

Zkouška: $L_1 = 3.\frac{5}{14} - \frac{3}{7} + \frac{5}{14} = \frac{15 - 6 + 5}{14} = \frac{14}{14} = 1$ $P_1 = 1$ $L_1 = P_1$

$L_2 = -\frac{5}{14} + 5.\frac{3}{7} + 3.\frac{1}{14} = \frac{-5 + 30 + 3}{14} = \frac{28}{14} = 2$ $P_2 = 2$ $L_2 = P_2$

$L_3 = 5.\frac{5}{14} + 3.\frac{3}{7} - \frac{1}{14} = \frac{25 + 18 - 1}{14} = \frac{42}{14} = 3$ $P_3 = 3$ $L_3 = P_3$

Cvičení:

Řešte soustavy rovnic:

19.) 2x - 3y + 4z = 5
3x + 4y - 2z = 0
-4x +2y + 3z = 8 [0,1,2]

20.) 3x + 5y - 8z = 4
2x + y - 3z = 0
x - 2y + 5z = 5 [∅]

21.) x + y - 2z = 0
x - y - 8z = 0
3x + 5y + 4z = 4 [5, -3, 1]

22.) a + 2b + 3c = 0
a - b + c = 0
a + b + 2c = 0 [0, 0, 0]

23.) 3(x - 2) + 4(z - 3) + 2(y - 1) = 9
4(x - 3) + 2(z - 1) + 3(y - 2) = [0, 0, 0]
2(x - 1) + 3(z - 2) + 4(y - 3) = 6 [0, 0, 0]

24.)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{5} = 2$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z = 9$$ [6, 8, 10]

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{z}{2} = 7$$

25.)

$$\frac{a+1}{b+1} = 2$$

$$\frac{b+2}{c+1} = 4$$ [0, 5, 2]

$$\frac{c+3}{a+1} = \frac{1}{2}$$

26.) 2x + y - 3z = -8
3x - y - 2z = -7
x - 5y + 4z = 7 [nekonečně mnoho řešení]

27.) $-a - b = \frac{1}{3}$

$b - c = \frac{1}{6}$

$a + c = \frac{4}{3}$ $\qquad [\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{12}]$

C) ***<u>Řešení soustavy rovnic zavedením nových neznámých</u>*** (**SUBSTITUČNÍ METODA**).
Tuto metodu používáme tehdy, umožní-li nám zjednodušení soustavy rovnic:

<u>Příklad</u>: Řešte soustavu:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{35}{6}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{13}{6}$$

<u>Řešení</u>: Zavedeme nové neznámé: $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$

$$2a + 3b = \frac{35}{6}$$

$$a + b = \frac{13}{6}$$

$12a + 18b = 35$

$-12a - 12b = -26$ $\qquad 6b = 9 \qquad b = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Z rovnice *) vypočteme a: $a + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$

$$a = \frac{13}{6} - \frac{9}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Vrátíme se k původním neznámým:

$\frac{1}{x} = a \qquad \frac{1}{y} = b$

$x = \frac{1}{a} \qquad y = \frac{1}{b}$

$x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{2}{3}$

======== =========

Zkouška: $L_1 = \frac{2}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{8 + 27}{6} = \frac{35}{6}$

$$P_1 = \frac{35}{6} \qquad L_1 = P_1$$

$$L_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6}$$

$$P_2 = \frac{13}{6} \qquad L_2 = P_2$$

Cvičení: Řešte soustavu:

1.)

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2 \qquad [1,1,1]$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

2)

$$\frac{15}{x} - \frac{12}{y} + \frac{8}{z} = 6$$

$$-\frac{9}{x} + \frac{16}{y} + \frac{12}{z} = 7 \qquad [3,4,2]$$

$$\frac{21}{x} + \frac{4}{y} - \frac{18}{z} = -1$$