

Algebraické výrazy

Výraz = každý zápis, který je správně utvořen podle zásad o zápisech čísel, proměnných, výsledků operací, hodnot funkcí.

Např. : $2\pi r$, $a^2 + b^2$,

Výrazy :

- číselné
- s proměnnou
- Významnou skupinu tvoří lomené výrazy s neznámou ve jmenovateli (musí být uvedena podmínka, výraz má smysl pouze tehdy, není-li neznámá ve jmenovateli)
- Další významnou skupinou jsou mnohočleny

Mnohočleny

1) Sčítání (odčítání) mnohočlenů:

Sčítat a odčítat můžeme pouze členy označené týmž písmenem ve stejné mocnině

Příklad:

$$a + 2b + 3c - 4a + b - 5c = -3a + 3b - 2c$$

$$x^2 + y^3 - z^2 - 2x^2 + 4y^3 + y^2 = -x^2 + 5y^3 - z^2 + y^2$$

Obsahuje-li mnohočlen závorky, před nimiž stojí znaménko minus, změni všechny členy uvnitř závorky po jejím odstranění své znaménko.

Příklad:

$$a^2 + 2a - \{3a - [a - (a^2 - 2a - 1) - 2]\} = a^2 + 2a - \{3a - [a - a^2 + 2a + 1 - 2]\} = a^2 + 2a - \{3a - [3a - a^2 - 1]\} = a^2 + 2a - \{3a - 3a + a^2 + 1\} = a^2 + 2a - a^2 - 1 = \underline{2a - 1}$$

2) Násobení mnohočlenu jednočlenem:

Násobíme - li mnohočlen jednočlenem, musíme tímto jednočlenem násobit každý člen mnohočlenu.

Příklad:

$$m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$$

$$m \cdot (a + b + c) = m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c$$

3) Násobení dvojčlenu dvojčlenem:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Musíme násobit každý člen s každým.

4) Násobení mnohočlenu mnohočlenem:

Každý člen prvního mnohočlenu násobíme každým členem mnohočlenu druhého.

Příklad:

$$(x^2 + 2xy + y^2) \cdot (x - 3) = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x^2y - 6xy + xy^2 - 3y^2$$

a) Dělení mnohočlenu mnohočlenem:

Dodržujeme postup ukázaný na následujícím příkladě:

Příklad:

$$(20a^3 + 32a^2 + 7a^4 - 5a) : (-1 + 7a)$$

Řešení:

➤ Členy nejprve srovnáme podle velikosti mocniny:

$$(7a^4 + 20a^3 + 32a^2 - 5a) : (7a - 1)$$

➤ První člen dělence dělíme prvním členem dělitele:

$$(7a^4 + 20a^3 + 32a^2 - 5a) : (7a - 1) = a^3 + 3a^2 + 5a$$

$$\begin{array}{r} \ominus (7a^4 - a^3) \\ \hline 21a^3 + 32a^2 - 5a \\ \ominus (21a^3 - 3a^2) \\ \hline 35a^2 - 5a \\ \ominus (35a^2 - 5a) \\ \hline 0 \end{array}$$

➤ získaným podílem násobíme postupně všechny členy dělitele a píšeme pod členy dělence se stejnou mocninou
➤ zbytek odečteme od původního dělence
Uvedený postup opakujeme, dokud je dělení možné

c) Dělení mnohočlenu mnohočlenem se zbytkem:

Příklad:

$$\begin{array}{r} (3a^3 - 4a + 5) : (a - 1) = 3a^2 + 3a - 1 + \frac{4}{a - 1} \quad \left. \vphantom{\frac{4}{a - 1}} \right\} \text{zbytek zapišeme ve tvaru podílu} \\ \hline -(3a^3 - 3a^2) \\ \hline (3a^2 - 4a + 5) \\ \hline -(3a^2 - 3a) \\ \hline -a + 5 \\ \hline -(-a + 1) \\ \hline 4 \end{array}$$

Součástí těchto příkladů by měla být zkouška : podíl násobíme dělitelem, jako výsledek získáme dělenec.

Cvičení:

1. Dělte mnohočleny: $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$ [$2x - 5$]
1. Dělte mnohočleny: $(9y^4 + 26y^2 + 25) : (3y^2 - 2y + 5)$ [$3y^2 + 2y + 5$]
1. Dělte mnohočleny: $(3x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 28x - 32) : (3x - 4)$ [$x^3 + 5x^2 + 13x + 8$]
1. Dělte mnohočleny: $(a^5 - 1) : (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ [$a - 1$]
2. Dělte mnohočleny: $(4a^4 - 14a^3b - 24a^2b^2 - 54b^4) : (a^2 - 3ab - 9b^2)$ [$4a^2 - 2ab + 6b^2$]
3. Dělte mnohočleny: $(15m^4 - m^3 - m^2 + 41m - 70) : (3m^2 - 2m + 7)$ [$5m^2 + 3m - 10$]

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Cvičení:

1.) Vypočítejte:

a) $(2xy + 1) \cdot (2xy - 1)$

c) $(5a^2 - 3b) \cdot (5a^2 + 3b)$

b) $(1 + 3ab) \cdot (1 - 3ab)$

d) $(4m^2 + 6n) \cdot (4m^2 - 6n)$

[a) $4x^2y^2 - 1$; b) $1 - 9a^2b^2$; c) $25a^4 - 9b^2$; d) $16m^4 - 36n^2$]

2.) Vypočítejte:

a) $(x + 10)^2$

d) $(m^2 + n^2)^2$

g) $(x^3 - 1)^2$

b) $(y^2 + 1)^2$

e) $(5ab - c)^2$

h) $(a - \frac{1}{a})^2$

c) $(a^2 + 0,1)^2$

f) $(3 - 5n)^2$

i) $(4a^2b + 5a^3b^2)^2$

[a) $x^2 + 20x + 100$; b) $y^4 + 2y^2 + 1$; c) $a^4 + 0,2a^2 + 0,01$; d) $m^4 + 2m^2n^2 + n^4$; e) $25a^2b^2 - 10abc + c^2$;
f) $9 - 30n + 25n^2$; g) $x^6 - 2x^3 + 1$; h) $a^2 - a + 0,25$; i) $16a^4b^2 + 40a^5b^3 + 25a^6b^4$]

3.) Vypočítejte:

a) $(a^2 - 1)^3$

d) $(2a - 3b)^3$

g) $(10m^4 - 6m^2)^3$

b) $(2 + a)^3$

e) $(x^2 - y^2)^3$

h) $(7p^3 + 9q^4)^3$

c) $(3 - b)^3$

f) $(4x^3 + 5y^2)^3$

i) $(x^n - 1)^3$

[a) $a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$; b) $8 + 12a + 6a^2 + a^3$; c) $27 - 27b + 9b^2 - b^3$; d) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$;
e) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$; f) $64x^9 + 240x^6y^2 + 300x^3y^4 + 125y^6$; g) $1000m^{12} - 1800m^{10} + 1080m^8 - 216m^6$; h) $343p^9 + 1323p^6q^4 + 1701p^3q^8 + 729q^{12}$; i) $x^{3n} - 3x^{2n} + 3x^n - 1$]

4.) Rozložte na součin podle vzorce:

a) $m^2 - k^2$

e) $-25 + b^2$

i) $27 - m^3$

b) $c^2 - 64$

f) $125 + x^3$

j) $k^9 + 1$

c) $0,25 - s^6$

g) $b^3 - 8$

k) $n^3 + 1000$

d) $-16x^4 + 81$

h) $v^3 + 512$

5.) Rozložte na součin podle vzorce:

a) $(x - 3)^2 - y^2$

d) $81 - (c - 3)^2$

b) $(6 - a)^2 - (1 + d)^2$

e) $4g^2 - (g - 8)^2$

c) $9(x - 1)^2 - 1$

f) $25r^2 - (7 + r)^2$

6.) Rozložte na součin podle vzorce:

a) $4 + 4a + a^2 - 9b$

e) $x^2 + 10x + 25 - 4a^2$

b) $k^2 - 64 + 16m - m^2$

f) $25 - x^2 - 4y^2 + 4xy$

c) $49x^2 - y^2 - 2y - 1$

g) $36b^2 - h^2 - 49 + 14h$

d) $p^2 - 8p + 16 - 100t$

h) $1 - y^2 - 8ay - 16a^2$

7.) Rozložte na součin podle vzorce:

a) $25x^2 - y^2 + 5x - y$

d) $100m^2 - 30m - p^2 - 3p$

b) $4x^2 - y^2 - 14x + 7y$

e) $a^2 - 36b^2 - a - 6b$

c) $16a^2 - 20a + 35b - 49b^2$

f) $x^2 - 9c^2 + 3c + x$

g) $81a^2 - 18a - 20d - 100d^2$

h) $24p - 36p^2 + m^2 - 4m$

Rozklad kvadratického trojčlenu

Používá se zejména při krácení lomených výrazů nebo řešení nejjednodušších kvadratických rovnic.

Některé trojčleny je možno rozložit na tvar: $(x + m)(x + n)$

Roznásobíme-li závorky, získáme: $(x + m)(x + n) = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m + n)x + mn$

Odtud je vidět, že $b = m + n$
 $c = m \cdot n$

Příklad:

Rozložme trojčlen $x^2 + 3x + 2$

Řešení:

Hledáme takovou dvojici čísel, která po vynásobení dává hodnotu 2 a při sečtení hodnotu 3.

Je to dvojice 1, 2

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

Příklad:

Rozložme trojčlen $x^2 - 5x + 6$

Řešení:

Protože lineární člen tohoto trojčlenu je záporný a absolutní člen je kladný, musí být obě hledaná čísla rozkladu záporná.

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Příklad:

Rozložme trojčlen $x^2 + 2x - 8$

Řešení:

Protože lineární člen tohoto trojčlenu je kladný a absolutní člen je záporný, musí být jedno hledané číslo rozkladu záporné a jedno kladné.

$$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

Cvičení:

Rozložte trojčleny

8.) $x^2 - x - 6$

17.) $x^2 - 6x + 8$

9.) $x^2 + 5x + 4$

18.) $x^2 + x - 12$

10.) $x^2 + 7x + 12$

19.) $x^2 - 7x + 12$

11.) $x^2 - 4x + 3$

20.) $x^2 - 5x - 6$

12.) $x^2 - 4x - 12$

21.) $x^2 - 10x - 24$

13.) $x^2 + 2x - 3$

22.) $x^2 + 6x - 16$

14.) $x^2 - 7x + 10$

23.) $x^2 + 9x + 18$

15.) $x^2 + 8x + 15$

24.) $x^2 - 18x - 40$

16.) $x^2 - 28x + 75$

25.) $x^2 + 12x - 64$

Lomené výrazy

Jsou to výrazy se zlomky, v nichž se neznámá vyskytuje i ve jmenovateli zlomku. Pracujeme s nimi obdobně jako s číselnými zlomky, řešení musí obsahovat uvedení podmínek, za nichž má výraz smysl – nesmí být nula ve jmenovateli!

26.) Krat'ite zlomek:

a) $\frac{x^2 - 36}{x^2 + 36 - 12x}$

c) $\frac{2m^2 - 20m + 50}{4m - 20 + 6ym - 30y}$

b) $\frac{3x + 12 - px - 4p}{x^2 - 16}$

d) $\frac{k^4 - r^4}{r^3 - rk^2}$

[a) $\frac{x+6}{x-6}; x \neq 6$; b) $\frac{3-p}{x-4}; x \neq \pm 4$; c) $\frac{m-5}{2+3y}; y \neq -\frac{2}{3}$; d) $-\frac{k^2+r^2}{r}; r \neq 0, r \neq \pm k$]

27.) Násobte zlomky:

a) $\frac{x^2 - 16}{2x^4} \cdot \frac{10x^3}{20 - 5x}$

c) $\frac{(x+2)^2}{3} \cdot \frac{3x^2 - 12x + 12}{x^3 + 4x^2 + 4x} \cdot \frac{x}{(x-2)^3}$

b) $\frac{a^3 + 1}{1 + 2a + a^2} \cdot \frac{a + 1}{3a^2 + 3 - 3a}$

d) $\frac{4x^2 - 4x + 4}{2x} \cdot \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

[a) $-\frac{x+4}{x}; x \neq 0$; b) $\frac{1}{3}; a \neq -1$; c) $\frac{1}{x-2}; x \neq \pm 2$; d) $\frac{2}{x-1}; x \neq 0; x \neq \pm 1$]

28.) Zjednodušte výraz:

a) $\frac{(a-5)^2 - 1}{5a - 30} : \frac{a^3 - 16a}{20a^2}$

c) $\frac{5y^3 - 40}{14y - 7y^2} : (4y^2 + 16 + 8y)$

b) $\frac{3b^2 - 18b + 27}{3y - 12} : \frac{9 - b^2}{3y - 12 + by - 4b}$

d) $\frac{x^4 - 16}{x^2 + 4 + 4x} : \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{2}$

[a) $\frac{4a}{a+4}; a \neq 0; a \neq 6; a \neq \pm 4$; b) $3 - b; b \neq \pm 3; y \neq 4$; c) $-\frac{5}{28y}; y \neq 0; y \neq -2$ d)

$\frac{2x}{x+2}; x \neq \pm 2; x \neq 0$]

29.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{7}{5a-5} + \frac{11}{10-10a}$$

[$\frac{3}{10(a-1)}; a \neq 1$]

30.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{5}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-9} + \frac{x-1}{2x+6}$$

[$\frac{x^2+4x+37}{2(x^2-9)}; x \neq \pm 3$]

31.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{2x+2y}{3y-6} : \frac{x+y}{y-2}$$

[$\frac{2}{3}$]

32.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{1-3y}{y^2-y} - \frac{3}{1-y}$$

[$\frac{1}{y^2-y}$]

33.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{2u-2}{u^2-1} + \frac{u+1}{u-1} + \frac{u-1}{u+1}$$

[$\frac{2u}{u-1}$]

34.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{2(a+b)}{3a-3b} : \frac{6a+6b}{a^2-ab}$$

[$\frac{a}{9}$]

35.) Zjednodušte výraz:

$$\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1-m} - \frac{1}{1-m^2}$$

[$\frac{1}{1-m^2}$]

- 36.) Zjednodušte výraz: $\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) : \frac{1+x}{1-x}$ $\left[\frac{1}{1+x}\right]$
- 37.) Zjednodušte výraz: $\frac{a+c}{ac-bc} - \frac{a-1}{2(b-a)}$ $\left[\frac{2a+c+ac}{2c(a-b)}\right]$
- 38.) Zjednodušte výraz: $\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t+2} - \frac{3}{2t+2}$ $\left[\frac{3t+2}{2(t+1)(t+2)}\right]$
- 39.) Zjednodušte výraz: $\frac{a}{x^2-2} + \frac{bx}{2x-x^3}$ $\left[\frac{a-b}{x^2-2}\right]$
- 40.) Zjednodušte výraz: $\frac{b}{3}\left(5 + \frac{7b}{3a+b}\right) \cdot \left(1 - \frac{2a+3b}{5a+4b}\right)$ $[b]$
- 41.) Zjednodušte výraz: $\left(\frac{1}{x-1} + 1\right) + \left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$ $\left[\frac{2x}{x^2-1}\right]$
- 42.) Zjednodušte výraz: $\frac{2a}{a+b} - \frac{3b}{b-a} - \frac{2a^2+3b^2}{a^2-b^2}$ $\left[\frac{ab}{a^2-b^2}\right]$
- 43.) Zjednodušte výraz: $\frac{a^2-25}{a^2+10a+25} : \frac{7a-35}{a^2+5a}$ $\left[\frac{a}{7}\right]$
- 44.) Zjednodušte výraz: $\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x+2}{2(1-x^2)}$ $\left[\frac{x^2+2x}{2x(x^2-1)} + 2\right]$
- 45.) Zjednodušte výraz: $\frac{2}{a} - \frac{3}{1-2a} - \frac{2a-3}{4a^2-1}$ $\left[\frac{12a^2-6a-2}{a(4a^2-1)}\right]$
- 46.) Zjednodušte výraz: $\frac{3a^2+12a+12}{a-2} : \frac{6(a+2)}{a^2-4}$ $\left[\frac{(a+2)^2}{2}\right]$
- 47.) Zjednodušte výraz: $\frac{2x+1}{x^2+2x} - \frac{3x+2}{4-x^2}$ $\left[\frac{5x^2-x-2}{x(x^2-4)}\right]$
- 48.) Zjednodušte výraz: $1 + \frac{1}{n-1} - \frac{n+1}{n}$ $\left[\frac{1}{n(n-1)}\right]$
- 49.) Zjednodušte výraz: $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(a - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b-a} - 1\right)$ $\left[\frac{a^2}{b^2}(b-1)\right]$
- 50.) Zjednodušte výraz: $\frac{2+x}{(x-3)^2} - \frac{2-x}{9-x^2}$ $\left[\frac{10x}{(x-3)^2(x+3)}\right]$
- 51.) Zjednodušte výraz: $\frac{7v-1}{2v^2+6v} + \frac{5-3v}{v^2-9}$ $\left[\frac{v^2-12v+3}{2v(v^2-9)}\right]$
- 52.) Zjednodušte výraz: $\left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{m-1}{m-2}\right) \cdot \frac{m^2-4}{2m}$ $[-1]$
- 53.) Zjednodušte výraz: $\frac{\frac{x}{4} - 1 + \frac{1}{x}}{x+2} : \frac{x-2}{x \cdot 4}$ $\left[\frac{x-2}{x+2}\right]$

- 54.) Zjednodušte výraz: $\frac{\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$ [$a - b$]
- 55.) Zjednodušte výraz: $\frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$ [$\frac{x}{x - y}$]
- 56.) Zjednodušte výraz: $\frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2 + b^2}{ab} - 2}$ [$\frac{b}{a - b}$]
- 57.) Zjednodušte výraz: $\frac{\frac{2r + 2s}{3r - 3s}}{\frac{6r + 6s}{r^2 - rs}}$ [$\frac{r}{9}$]
- 58.) Zjednodušte výraz: $\frac{\frac{1 + k}{2k}}{\frac{k^2 - 1}{5k}}$ [$\frac{5}{2(k - 1)}$]
- 59.) Zjednodušte výraz: $\frac{1 + \frac{m}{n}}{n - \frac{m^2}{n}}$ [$\frac{1}{n - m}$]
- 60.) Zjednodušte výraz: $\frac{2 - \frac{k^2 + z^2}{kz}}{\frac{k}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{1}{k}}$ [$-z$]